Форма N Н-9.02

Міністерство освіти і науки України

Житомирський державний університет імені Івана Франка

Фізико-математичний факультет

Кафедра алгебри та геометрії

Освітньо-кваліфікаційний рівень «бакалавр»

ДИПЛОМНА РОБОТА

Дослідження загального рівняння поверхні другого порядку

Виконала: студентка 42 групи,
напряму підготовки: 6.040201 Математика*,
денного відділення
Громницька Ілона Юріївна

Керівник: кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри алгебри та геометрії
Чемерис Ольга Анатоліївна

Житомир – 2014 рік

ЗМІСТ РОБОТИ

ВСТУП **3**

РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ **5**

1.1. Поняття поверхні. Рівняння поверхні в просторі 5

1.2. Невироджені поверхні другого порядку 6

1.3. Загальне рівняння поверхні другого порядку та його дослідження 22

1.4. Перетин поверхні другого порядку з прямою 24

РОЗДІЛ 2. ЗВЕДЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИДУ **37**

2.1. Спрощення рівнянь окремих поверхонь 37

2.2. Визначення рівняння пари площин, заданих рівнянням другого порядку 46

2.3. Визначення виду поверхні другого порядку методом виділення повних квадратів. 48

РОЗДІЛ 3. ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ **50**

3.1. Дослідження загального рівняння поверхні другого порядку засобами MathCad 50

3.2 Застосування в архітектурі 60

ВИСНОВКИ **64**

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ **65**

ДОДАТКИ **68**

ВСТУП

В умовах сучасного динамічного розвитку суспільства та ускладнення його технічної та соціальної інфраструктури найважливішим стратегічним ресурсом стає інформація. Поряд з традиційними ресурсами впроваджуються й інформаційні технології, які являються ефективним засобом підвищення рівня управління усіма сферами суспільної діяльності. При цьому головною передумовою успішного розвитку процесів інформатизації суспільства є інформатизація науки. До того ж сучасна освіта потребує гуманітаризації математичних дисциплін, цьому сприятиме створення міжпредметних зв’язків математики з архітектурою.

Аналіз спеціальної та науково-методичної літератури свідчить про те, що дослідження різних авторів стосовно зазначених питань або залишились на рівні постановки проблеми, або були присвячені окремим аспектам створення та розвитку комп’ютерних програм, які сприяють ґрунтовному дослідженню поверхонь другого порядку.

Об’єкт дослідження – загальне рівняння поверхні другого порядку.

Предмет дослідження – комп’ютерні технологій для дослідження та побудови поверхонь другого порядку; практична значущість поверхонь другого порядку.

Мета дослідження: дослідити використання комп’ютерних технологій для дослідження та побудови поверхонь другого порядку, заданих загальним рівнянням; розробити матеріал по застосуванню поверхонь другого порядку в архітектурі та будівництві.

Для реалізації цієї мети були поставлені такі завдання:

– вивчити і проаналізувати основні види поверхонь другого порядку, а саме розглянути способи їх побудови, дослідити основні властивості цих поверхонь;

– дослідити загальне рівняння поверхні другого порядку;

– розглянути різні способи зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного виду;

– продемонструвати використання отриманого матеріалу для розв'язування задач;

– подати приклади раціонального використання комп'ютерної графіки, а також наочні приклади щодо її застосування в побудові та дослідженні поверхонь другого порядку;

– дослідити практичну значущість поверхонь другого порядку.

Для реалізації дослідницького завдання залучались методи, які базуються на положеннях аналітичної,алгебраїчної, нарисної, обчислювальної геометрії, теорії поверхонь, також сучасних технологій – об'єктного аналізу, проектування та програмування в системах комп'ютерної графіки. Також застосовувались методи системного підходу, моделювання.

При проведенні дослідження використовувалась комп'ютерна програма Mathcad 14, за допомогою якої було показано зв'язок геометрії з комп'ютерними технологіями.

Наукова новизна одержаних результатів визначається в тому

робота стане в нагоді студентам доступно і наочно розібратися в матеріалі. Покаже практичне застосування властивостей визначних кривих, навчить будувати криві.

Я вибрала саме цю тему тому, що вважаю її, цікавою і змістовною, розвиваючої пізнавальний інтерес до аналітичної геометрії, що відкриває практичне значення геометрії в житті. Використання даного матеріалу на лекціях геометрії розширить знання учнів про поверхні, котрі досліджуються за програмою. У різних розділах математики і на різних етапах вивчення ми зустрічаємося з поверхнями другого порядку. Але, ніде не йдеться про їх практичне застосування.

Дипломна робота налічує 70 сторінок, основний текст складає 58 сторінок. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та дванадцять додатків.

Публікації. За матеріалами дипломної роботи опубліковано одну наукову статтю.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1.1. Поняття поверхні. Рівняння поверхні в просторі

Найважливіше поняття аналітичної геометрії в просторі є рівняння поверхні. Щоб означити його, припустимо, що координати $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ є довільні змінні величини.

Означення 1. Рівнянням з трьома змінними $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ називається співвідношення виду: $F(x, y, z) = 0$,(1.1), де, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ є певний аналітичний вираз, який містить змінні $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$, при умові, що рівність (1.1) не залишається справедливою для всіх значень трійок ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$).

Якщо вона справедлива при всіх значеннях x, y, z, то співвідношення (1.1) називається тотожністю. Отже, за допомогою рівняння (1.1) встановлюється функціональна залежність між трьома змінними величинами.

Означення 2. Рівнянням поверхні відносно заданої системи координат називається рівняння з трьома змінними, яке задовольняють координати кожної точки, що лежить на поверхні, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на ній.

В аналітичній геометрії і математичному аналізі поверхні виражають їх рівняннями. Якщо поверхня задана геометрично, то можна знайти її рівняння і, навпаки, поверхню в просторі можна задати її рівнянням.

Означення 3. Поверхнею, заданою рівнянням відносно певної декартової системи координат, називається ГМТ, координати яких задовольняють дане рівняння.

Положення точки на довільній поверхні визначається двома числами так само, як і на площині. Покажемо це, розв’язавши рівняння (1.1), наприклад, відносно z (припустимо, що це можна зробити), дістанемо: $z = f(x, y)$. Надаючи довільних значень двом змінним x і y, ми знайдемо значення z , тобто визначатимемо положення точок на поверхні.

Поверхні поділяються на алгебраїчні і неалгебраїчні (трансцендентні). Якщо ліва частина рівняння (1.1) є многочлен степеня n відносно x, y, z, то відповідна поверхня називається алгебраїчною поверхнею n-го порядку.

В даній роботі ми будемо розглядати алгебраїчні поверхні другого порядку, тобто геометричні місця тих і тільки тих точок простору, координати яких у обраній прямокутній системі задовольняють загальному не виродженому алгебраїчному рівнянню другого степеня відносно змінних x, y, z

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0 \quad (1.3)$$

$$(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 > 0).$$

Рівняння (1.3) називається загальним рівнянням алгебраїчної поверхні другого порядку (у подальшому просто поверхні другого порядку).

1.2. Невироджені поверхні другого порядку

Сфера

Означення. Сферою називається геометричне місце точок, відстань яких від заданої точки простору є величина стала.

Ця точка називається центром сфери, а відрізок, який сполучає центр сфери з її довільною точкою, називається радіусом сфери.

Візьмемо в просторі декартову прямокутну систему координат, довільно розміщену відносно сфери. Позначимо через $C\ (a, b, c)$ центр сфери, а через R позначимо її радіус. Нехай $M\ (x, y, z)$ є довільна точка сфери. Згідно з означенням сфери $CM = R$.

Відстань між точками M і C визначимо за формулою:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R \quad (1.4)$$

Очевидно, що цю рівність можна розглядати як рівняння сфери. Щоб надати йому більш зручного вигляду, звільнимось від радикала:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (1.5)$$

Отже, (1.5) є рівнянням сфери. Якщо центр сфери міститься в початку координат, то $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ і рівняння (1.5) має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Якщо ми розкриємо в рівнянні (1.5) дужки, то дістанемо :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

де $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$. Отже рівняння сфери є неповним рівнянням другого порядку з трьома змінними, оскільки в ньому немає членів з добутками змінних xy, xz, yz. Крім того, коефіцієнти при квадратах змінних між собою рівні. Але не кожне рівняння такого виду виражає дійсну сферу. Покажемо це, розглянувши довільне рівняння:

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Cz + E = 0 \qquad (1.6)$$

такого ж виду, як рівняння сфери. Поділимо обидві його частини на A і відокремимо квадрати: $\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 + \left(z + \frac{D}{2A}\right)^2 = \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} + \frac{D^2}{4A^2} - \frac{E}{A}$ Введемо позначення: $a = -\frac{B}{2A}, b = -\frac{C}{2A}, c = -\frac{D}{2A}$ і $R^2 = \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} + \frac{D^2}{4A^2} - \frac{E}{A}$. Якщо $R^2 > 0$, то рівняння (1.6) виражає дійсну сферу з центром $O\left(-\frac{B}{2A}; -\frac{C}{2A}; -\frac{D}{2A}\right)$ і радіусом $R = \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} + \frac{D^2}{4A^2} - \frac{E}{A}}$.

Але коли $R^2 < 0$, то радіус сфери уявний. Координати жодної точки простору не задовольняють рівняння (1.6).

Якщо ж $R^2 = 0$, то рівняння (1.6)задовольняють координати лише однієї точки – центра сфери. В цьому випадку сфера стягується в точку.

Циліндр

Означення. Циліндричною поверхнею або просто циліндром, називається поверхня, утворена рухом прямої, яка перетинає задану криву і залишається паралельною сталому вектору. Пряма, яка своїм рухом утворює циліндр, називається його твірною, а крива, яку перетинають криві, називається напрямною циліндра (рис 1.1).

Циліндр, рівняння якого буде другого степеня, називається циліндром другого порядку. Ми будемо розглядати лише циліндри другого порядку.

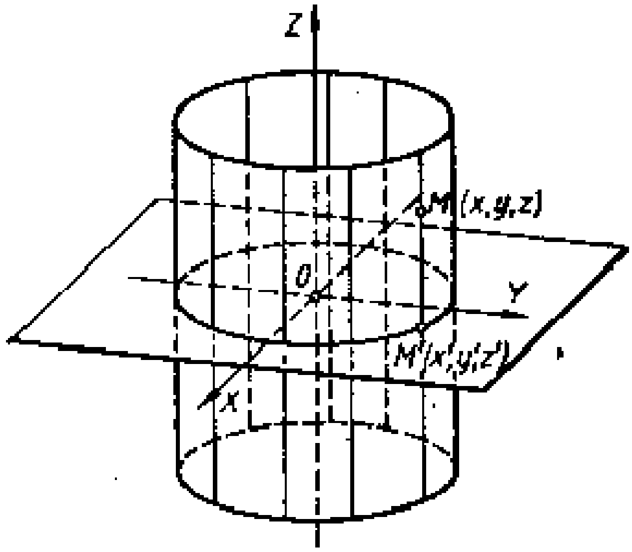


Рис 1.1

Візьмемо в просторі декартову прямокутну систему координат, довільно розміщену відносно циліндра. Нехай напрям твірних циліндра задано вектором $u = \{l, m, n\}$,а напрямну циліндра – системою рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (1.7)$$

Позначимо через $M'(x'; y'; z')$ точку перетину твірної циліндра з напрямною і напишемо рівняння твірної:

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n} \qquad (1.8)$$

Змінні x, y, z в цьому рівнянні є координати точок твірної, отже, координати точок циліндричної поверхні. Координати точки $M'(x'; y'; z')$ задовольняють рівняння (1.7) і (1.8). Отже, виключаючи $x' y' z'$ з рівнянь (1.7), (1.8), дістанемо співвідношення між координатами точок циліндра, тобто рівняння циліндра.

Будемо розглядати циліндричні поверхні, напрямні яких знаходяться в одній з координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, що перпендикулярна цій площині.

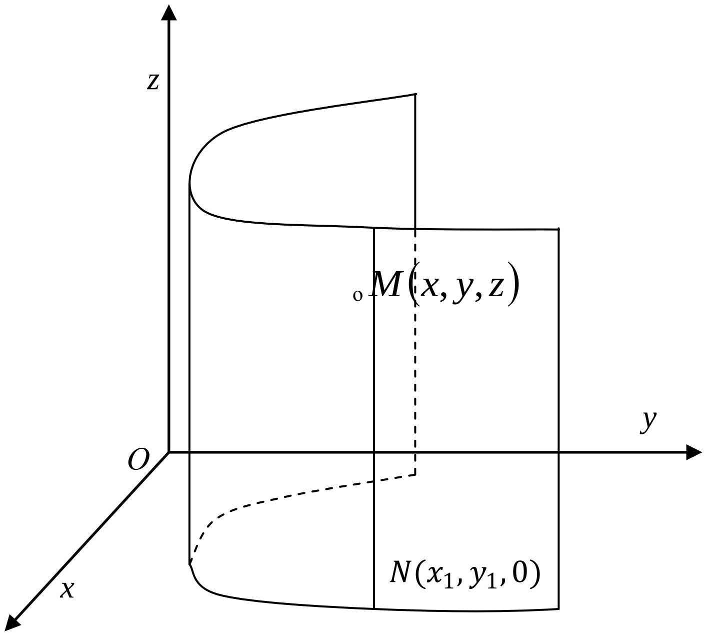


Рис.1.2

Нехай у площині Oxy міститься деяка лінія K, рівняння якої має вигляд:

$$F(x, y) = 0 \qquad (1.9)$$

Побудуємо циліндр з твірними, паралельними осі Oz, і напрямною K.

<u>Теорема</u>**.** Рівняння циліндра з твірними, паралельними осі Oz, має вигляд (1.9), тобто не містить координати z (рис.1.2).

Доведення. Візьмемо на циліндрі довільну точку $M(x, y, z)$. Вона знаходиться на деякій твірній. Нехай N є точкою перетину цієї твірної з площиною Oxy. Отже, точка N знаходиться на лінії K і її координати задовольняють рівняння (1.9). Але точка M має ті ж самі абсцису і ординату, що і точка N. Таким чином, рівнянню (1.5) задовольняють і координати точки $M(x, y, z)$, тому що воно не містить z, і оскільки M – це будь-яка точка циліндра, то рівнянням циліндра буде рівняння (1.9).

Аналогічно, рівняння $F(x, z) = 0$ є рівнянням циліндра з твірними, паралельними осі Oy, а $F(y, z) = 0$ є рівнянням циліндра з твірними, паралельними осі Ox. Назва циліндра визначається назвою напрямної. Якщо напрямною є еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (1.10) у площині Oxy, то відповідна йому циліндрична поверхня називається еліптичним циліндром. Його рівняння співпадає з рівнянням еліпса (1.10).

Частинним випадком еліптичного циліндра є коловий циліндр, який визначається рівнянням $x^2+y^2=R^2$ (Рис. 1.3).

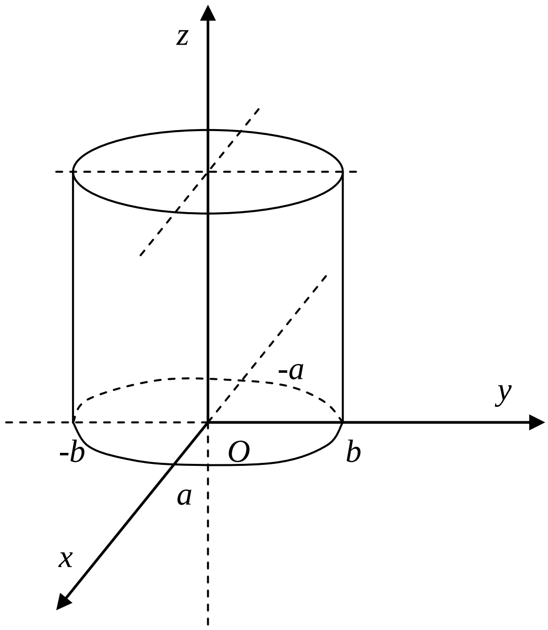


Рис. 1.3

Рівняння $y^2=2px$ визначає параболічний циліндр (рис. 1.4).

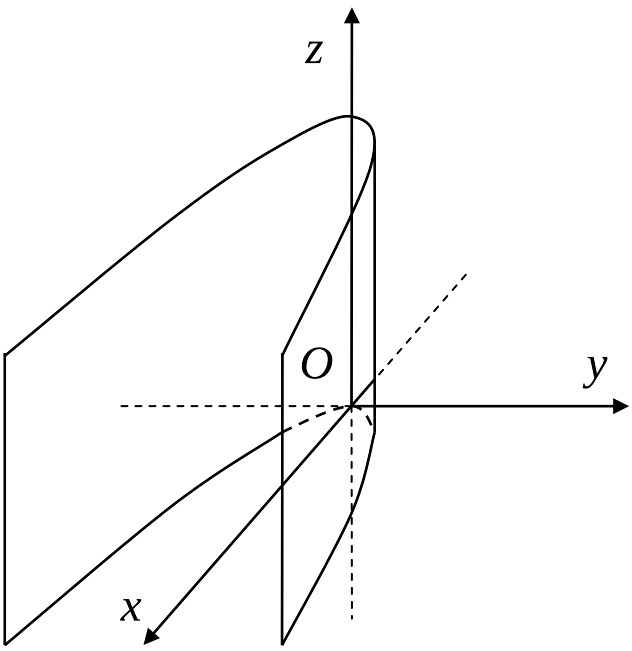


Рис. 1.4

А рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$визначає гіперболічний циліндр (рис. 1.5).

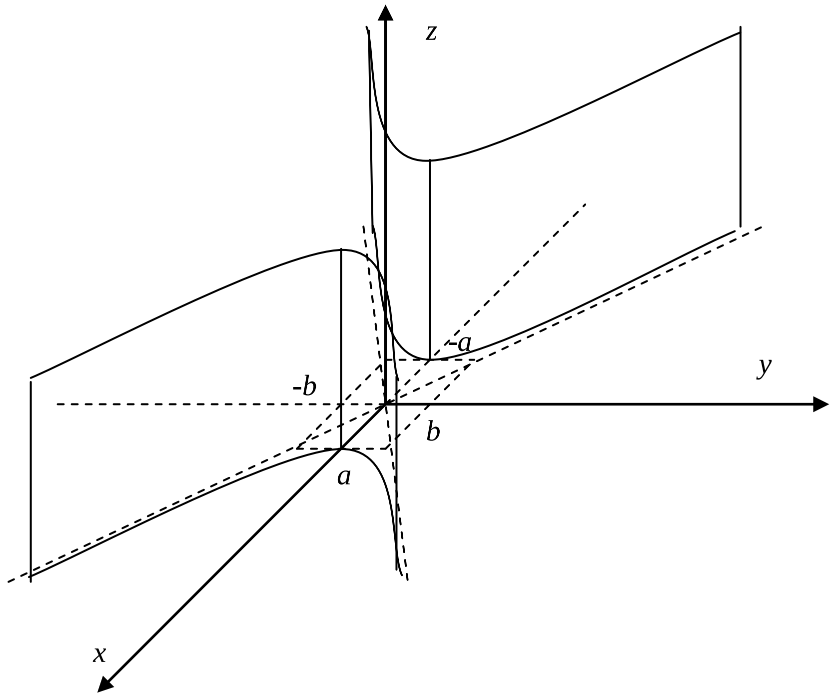


Рис. 1.5

Конічні поверхні

Означення. Конічною поверхнею або просто конусом, називається поверхня утворена рухом прямої, яка проходить через задану точку S і перетинає задану криву (рис. 1.6).

Прямі, які утворюють конус, називаються його твірними, спільна для всіх твірних точка конуса – вершина, а крива, яку перетинають твірні – напрямна конуса.

Конус, рівняння якого другого порядку, називається конусом другого порядку.

Візьмемо в просторі декартову прямокутну систему координат, довільно розміщену відносно конуса, а його напрямну задамо системою рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (1.11)$$

Позначимо через $M'(x'; y'; z')$ точку перетину довільної твірної конуса з напрямною і запишемо рівняння твірної як прямої, що проходить через дві точки $S(a, b, c)$ і $M'(x'; y'; z')$:

$$\frac{x-a}{x'-a}=\frac{y-b}{y'-b}=\frac{z-c}{z'-c} \qquad (1.12)$$

Змінні x, y, z в рівнянні (1.12) є координати точок твірної конуса, отже, координати точок конуса. Координати точки $M'(x';y';z')$ задовольняють рівняння (1.11). Отже, виключаючи x', y', z' з рівнянь (1.11) і (1.12), знайдемо шукане рівняння конуса.

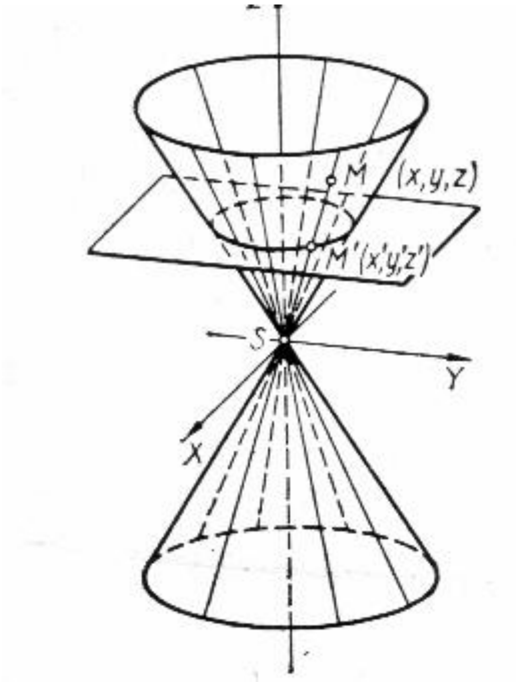


Рис. 1.6

Наприклад, якщо вершина конуса розташована в точці $S(0,0,0)$, а напрямною є еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, який лежить в площині $z=c$, то рівняння (1.11) і (1.12) відповідно мають вигляд $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ і $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}$. Виключаючи з них x_1, y_1 і z_1 з урахуванням того, що $z=c$, отримаємо рівняння конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Поверхні обертання

Означення. Нехай в просторі задано довільну плоску лінію C і в її площині пряму L. Поверхня, утворена обертанням лінії C навколо прямої L, називається поверхнею обертання.

Пряма L називається віссю поверхні обертання. Лінія C називається твірною поверхні обертання або її меридіаном. Всі меридіани лежать у площинах симетрії поверхні.

При обертанні кожна точка M лінії C описує коло з центром на осі обертання. Кола, описані точками твірної, розміщені в площинах, перпендикулярних до осі обертання, називають паралелями поверхні обертання.

Введемо в просторі декартову прямокутну систему координат. Розмістимо її так, щоб вісь OZ суміщалась з віссю обертання поверхні, а осі OX і OY лежали б в площині однієї з паралелей (рис 1.7).

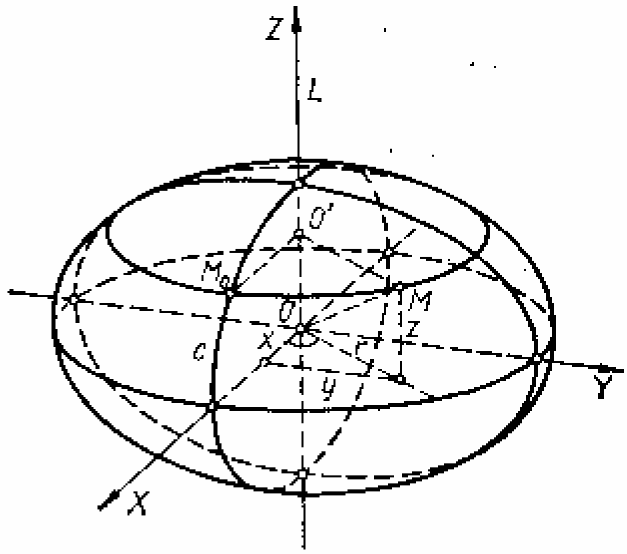


Рис.1.7

Нехай початковий меридіан поверхні обертання задано відносно цього координатного базису системою рівнянь:

$$\begin{cases} F(x,z) = 0, \\ y = 0, \end{cases} \qquad (1.13)$$

Тобто початковий меридіан поверхні лежить у площині XOZ. Складемо рівняння поверхні. Позначимо через $M\ (x,\ y,\ z)$ довільну точку поверхні обертання, а через $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – точку початкового меридіана (1.13), яка лежить на тій самій паралелі, що й точка *M (x, y, z)*. Зрозуміло, що

$$O'M_0 = O'M = r, \qquad (1.14)$$

де O' – центр, а r – радіус паралелі.

В точці M_0 маємо $x_0 = r$. Координати точки M_0 задовольняють рівняння початкового меридіана. Отже,

$$F(r, z_0) = 0. \qquad (1.15)$$

Радіус паралелі є величина стала, тобто однакова для всіх точок паралелі. Але в довільній точці *M* паралелі радіус визначається за формулою:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (1.16)$$

А z має однакове значення для всіх точок паралелі, тобто $z_0 = z$. Підставляючи ці значення r і z_0 в (1.15) дістанемо:

$$F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0. \qquad (1.17)$$

Це рівняння зв'язує координати довільної точки *M* поверхні обертання, отже, є рівнянням поверхні обертання.

Аналогічно, якщо крива обертається навколо осі OY, то рівняння поверхні обертання набуває вигляду:

$$F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0, \qquad (1.18)$$

а якщо крива $F(x, y) = 0$ розташована в площині XOY, то рівняння поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі OX, є

$$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0. \qquad (1.19)$$

Ці й інші можливі випадки наведені у таблиці 1.1.(Див. додатки)

Так, наприклад, обертаючи пряму $y = z$ навколо осі Oz, отримаємо поверхню обертання $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = z$, або $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Ця поверхня називається круговим конусом другого порядку.

<u>Приклад 1</u>. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса

$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі OZ.

Розв'язання. На підставі формули (1.17) в рівняння початкового меридіана підставляємо замість x вираз $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Отже рівняння поверхні, утворене обертанням еліпса навколо осі OZ, є:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1.20)$$

Ця поверхня називається еліпсоїдом обертання (рис. 1.7).

Приклад 2. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}$ навколо осі OZ, тобто навколо уявної осі гіперболи (рис.1.9).

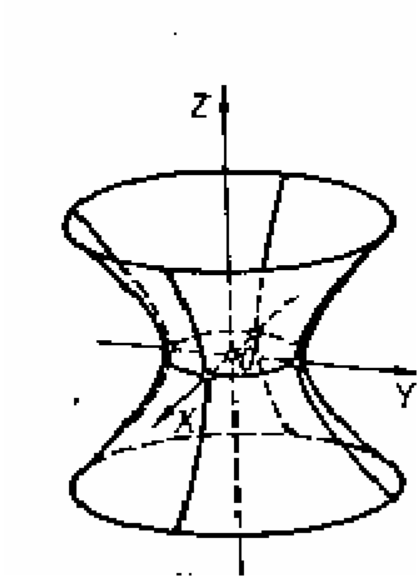


Рис. 1.9

Задача розв'язується аналогічно до попередньої. Рівняння шуканої поверхні є:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1.21)$$

Поверхня (1.21) називається однопорожнинним гіперболоїдом обертання.

Приклад 3. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\\ y=0\end{cases}$ навколо осі OZ, тобто навколо дійсної осі гіперболи (рис. 1.10).

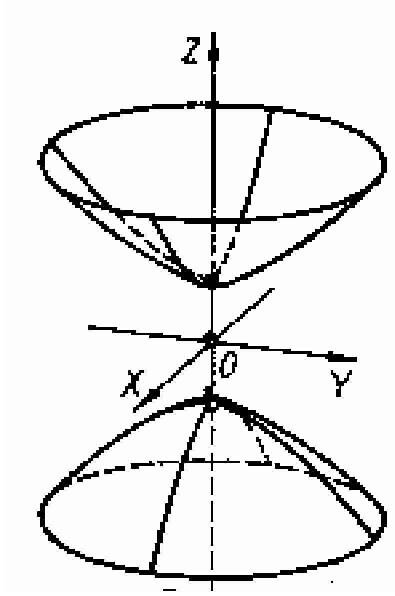


Рис. 1.10

Задача розв’язується аналогічно до попередньої. Рівняння шуканої поверхні є:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (1.22)$$

$$-\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1.22)$$

Поверхня (1.22) називається двопорожнинним гіперболоїдом обертання, бо вона складається з двох окремих порожнин.

<u>Приклад 4</u>. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням параболи $\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$, навколо осі OZ (рис. 1.11).

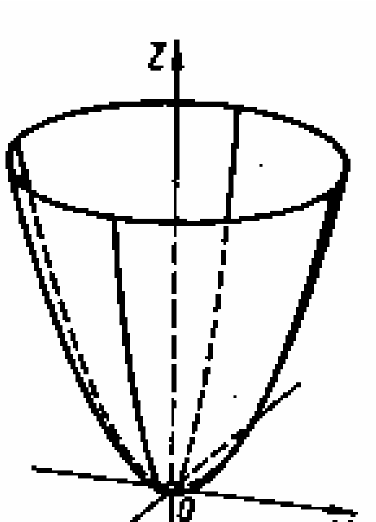


Рис. 1.11

Задача розв’язується аналогічно до попередньої. Рівняння шуканої поверхні є:

$$\frac{x^2+y^2}{p} = 2z \quad (1.23)$$

Поверхня називається параболоїдом обертання.

Еліпсоїд

Еліпсоїдом загального виду, або просто еліпсоїдом, називається поверхня утворена внаслідок рівномірного стиснення еліпсоїда обертання до однієї з його площин симетрії, наприклад, до XOZ (або шляхом розтягнення в протилежних напрямах). При рівномірному стисненні еліпсоїда до площини XOZ всі його точки наближаються з двох сторін з однаковими швидкостями до цієї площини, внаслідок чого ординати всіх точок пропорціонально зменшуються (рис. 1.12).

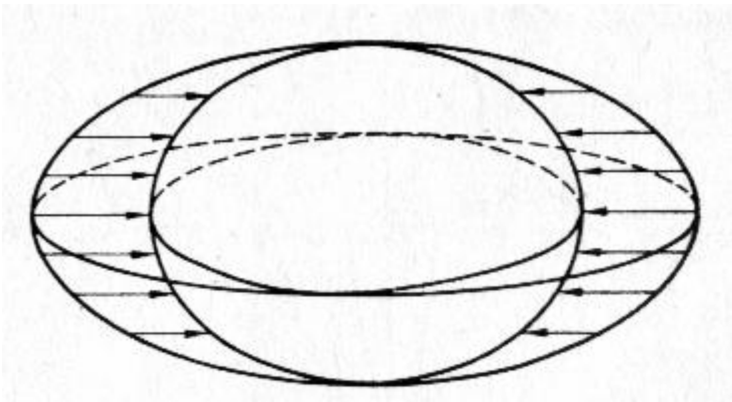


Рис. 1.12

Нехай $M'(x';y';z')$ є довільна точка еліпсоїда обертання. Отже, на підставі (1.20),

$$\frac{x'^2+y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1 (1.20')$$

Після стиснення поверхні точка M' перейде в точку $M(x;y;z)$, координати якої ми визначимо за формулами:

$$x = x', \quad y = ky', \quad z = z', \quad k < 1. \qquad (1.24)$$

Геометричне місце точок $M(x;y;z)$ є, очевидно еліпсоїд загального виду. Як було вже сказано, його можна утворити з еліпсоїда обертання також розтягненням, зокрема розтягненням від площини $XOZ.$ Очевидно, що при цьому в (1.24) $k > 1$. Щоб дістати рівняння еліпсоїда загального виду, визначимо з (1.24) x', y', z' і підставимо їх значення в $(1.20')$. Дістанемо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(ak)^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1.25)$$

Позначимо в рівнянні (1.25) $ak = b$. Тоді дістанемо канонічне рівняння еліпсоїда в загальному вигляді:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1.26)$$

Числа a, b, c називають параметрами еліпсоїда. В еліпсоїда загального виду всі три параметри різні. На підставі способу утворення еліпсоїда, а також з його рівняння очевидно, що еліпсоїд є замкнена овальна поверхня з трьома взаємно перпендикулярними площинами симетрії (рис. 1.7), які при вибраній нами системі координат суміщаються з координатними. Лінії перетину площин симетрії, тобто координатні осі, є осями симетрії еліпсоїда, а центр симетрії називається його центром.

Точки перетину еліпсоїда з осями симетрії називаються його вершинами, а відрізки, які він відтинає на координатних осях, – півосями. Еліпсоїд має 6 вершин, а довжини його півосей дорівнюють значенням параметрів a, b, c. Весь еліпсоїд можна помістити всередині прямокутного паралелепіпеда, ребра якого дорівнюють $2a, 2b, 2c$. Еліпсоїд обертання і сфера – це окремі випадки еліпсоїда.

Гіперболоїди

Однопорожнинним гіперболоїдом загального виду, або просто однопорожнинним гіперболоїдом, називається поверхня, утворена внаслідок стиснення (або розтягнення) однопорожнинного гіперболоїда обертання (1.21) до однієї з його площин симетрії.

Нехай $M'(x'; y'; z')$ є довільна точка однопорожнинного гіперболоїда обертання. Отже, його рівняння має вигляд:

$$\frac{x'^2 + y'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1 \qquad (1.21')$$

Після стиснення поверхні до площини XOZ точка M'переходить в точку $M(x; y; z)$, координати якої ми визначимо за допомогою формули (1.24).

Геометричне місце точок $M(x;y;z)$ є однопорожнинний гіперболоїд загального виду, визначимо з (1.24) x', y', z' через x, y, z і підставимо їх в рівняння (1.24). Дістанемо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(ak)^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,(1.27)$$

або, позначаючи akчерезb, остаточно матимемо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1.28)$$

Рівняння (1.28) називається канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда. Числа a, b, c називаються його параметрами. У однопорожнинного гіперболоїда всі три параметри різні. Якщо a=b, то маємо однопорожнинний гіперболоїд обертання.

Однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, яка необмежено розширюється в обидва боки від горлового еліпса, по якому гіперболоїд перетинає площину XOY (z=0) (Рис. 1.9.).

З рівняння однопорожнинного гіперболоїда видно, що координатні площини є площинами його симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат – центр симетрії, або просто центр гіперболоїда. Однопорожнинний гіперболоїд має 4 вершини, оскільки він перетинає 2 координатні осі. Вісь OZ не перетинається однопорожнинним гіперболоїдом.

Двопорожнинним гіперболоїдом загального виду, або просто двопорожнинним гіперболоїдом, називається поверхня, утворена рівномірним стисненням (або розтягом) двопорожнинного гіперболоїда обертання (1.22) до однієї з його площин симетрії. Нехай $M'(x';y';z')$ є довільна точка двопорожнинного гіперболоїда обертання. Отже, його рівняння має вигляд:

$$\frac{x'^2+y'^2}{a^2}-\frac{z'^2}{c^2}=-1 \qquad (1.22')$$

Після стиснення поверхні до площини XOZ точка M'переходить в точку $M(x;y;z)$, координати якої ми визначимо за допомогою формули (1.24). Геометричне місце точок $M(x;y;z)$ є двопорожнинний гіперболоїд загального виду, визначимо з (1.24) x', y', z' через x, y, z і підставимо їх в рівняння (1.22′). Дістанемо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(ak)^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,(1.29)$$

або, позначаючи ak через b і змінюючи знаки в обох частинах рівності, остаточно матимемо:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (1.30)$$

Рівняння (1.30) називається канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда. Числа a, b, c називаються його параметрами. У однопорожнинного гіперболоїда всі три параметри різні.

Двопорожнинний гіперболоїд складається з двох окремих порожнин, кожна з яких має форму нескінченної опуклої чаші (рис. 1.10). Двопорожнинний гіперболоїд має три взаємно перпендикулярні площини симетрії, які суміщаються з координатними площинами, і три взаємно перпендикулярні осі симетрії OX, OY, OZ. Центр симетрії, який міститься в початку координат – центр двопорожнинного гіперболоїда.

Двопорожнинний гіперболоїд має 2 вершини. В цих вершинах його перетинає вісь OZ, тобто вісь гіперболоїда. Осі OX і OY не мають дійсних точок перетину з цією поверхнею.

Параболоїди

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, утворена рівномірним стисненням (або розтягом) параболоїда обертання (1.23) до однієї з його площин симетрії. Нехай $M'(x';y';z')$ є довільна точка параболоїда обертання, тоді, його рівняння має вигляд:

$$\frac{x'^2+y'^2}{p}=2z \qquad (1.23')$$

Після стиснення поверхні до площини XOZ точка M'переходить в точку $M(x;y;z)$, координати якої ми визначимо за допомогою формули (1.24). Геометричне місце точок $M(x;y;z)$ є еліптичним параболоїдом загального виду, визначимо з (1.24) x', y', z' через x, y, z і підставимо їх в рівняння $(1.23')$. Дістанемо:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{pk}=2z \qquad (1.31)$$

або позначаючи pk через q, остаточно запишемо:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \; (p > 0, q > 0). \qquad (1.32)$$

Рівняння (1.32) називається канонічним рівнянням еліптичного параболоїда. В еліптичному параболоїді параметри p і q різні (рис. 1.11).

Еліптичний параболоїд має форму нескінченної опуклої чаші. Дві його взаємно перпендикулярні площини симетрії, які суміщаються площинами XOZ і YOZ, перетинаються по осі симетрії, або осі параболоїда. Еліптичний параболоїд не має центра і має лише одну вершину – точку перетину параболоїда з віссю OZ.

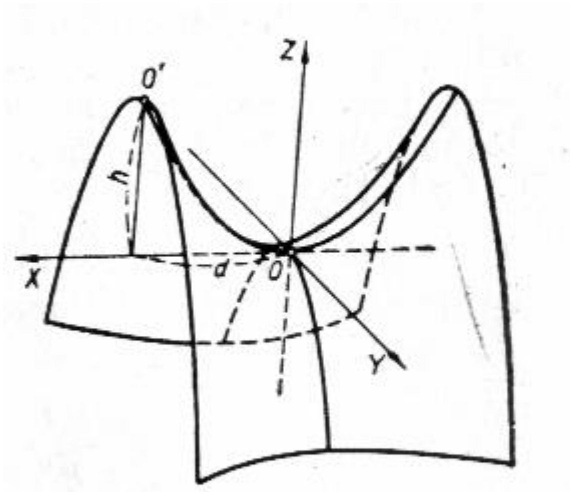


Рис. 1.13

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, описана параболою, яка рухається в просторі так, що її площина залишається весь час паралельною заданій площині, наприклад, YOZ, а вершина O' ковзає по нерухомій параболі, розміщеній в перпендикулярній площині, наприклад, XOZ. Напрями обох осей парабол (рухомої і нерухомої) протилежні. Система координат декартова, прямокутна. Щоб скласти рівняння гіперболічного параболоїда запишемо рівняння напрямної, тобто нерухомої параболи,

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases} \qquad (1.33)$$

І твірної, тобто рухомої параболи,

$$\begin{cases} y^2 = 2q(h - z) \\ x = \pm d, \end{cases} \qquad (1.34)$$

де, d є відстань площини рухомої параболи від координатної площини YOZ, а h – відстань вершини O' , рухомої параболи від координатної площини XOY (рис. 1.13). Вершина O' рухомої параболи (1.34) ковзає по параболі (1.33). Отже її координати $O'(d;o;h)$ задовольняють рівняння (1.33):

Звідки $d^2 = 2ph, h = \frac{d^2}{2p}$.

Підставляючи значення h в рівняння (1.34), дістанемо:

$$\begin{cases} y^2 = 2q\left(\frac{d^2}{2p} - z\right) \\ x = \pm d, \end{cases} \qquad (1.35)$$

а виключаючи d з обох цих рівнянь, матимемо рівняння гіперболічного параболоїда

$$y^2 = 2q\left(\frac{x^2}{2p} - z\right), \qquad (1.36)$$

або остаточно:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z(p > 0, q > 0). \qquad (1.37)$$

Рівняння (1.37) називається канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда. Він має форму сідла. Дві його взаємно перпендикулярні площини симетрії перетинаються по осі симетрії, яка називається віссю параболоїда. Точка перетину осі параболоїда з поверхнею називається його вершиною. Гіперболічний параболоїд не має центра.

1.3. Загальне рівняння поверхні другого порядку та його дослідження

В попередніх пунктах ми користувались канонічними рівняннями поверхонь другого порядку. При виведенні канонічних рівнянь поверхонь за координатні осі ми приймали їх осі симетрії. Канонічне рівняння поверхні завжди має специфічний для заданої поверхні вигляд і містить параметри, які характеризують форму і розміри поверхні. Але коли поверхня віднесена до довільної декартової прямокутної системи координат в просторі, то її рівняння вже не має специфічної для заданої поверхні форми. Отже, постає питання, як саме на підставі загального рівняння поверхні другого порядку визначити її вид, форму і розміри та як звести її до рівняння канонічного виду.

Крім того нами було розглянуто лише основні поверхні другого порядку. Тепер перед нами стоїть завдання охопити в своїх дослідженнях всі поверхні другого порядку та подати їх класифікацію. Для цього дослідимо загальне рівняння другого порядку з трьома змінними. Загальне рівняння містить десять членів, а саме: три члени з квадратами змінних, три члени з їх попарними добутками, три члени першого степеня відносно змінних і вільний член

Коефіцієнти рівняння будемо позначати a_{ij} $(i,j=1,2,3,4)$. При дослідженні загального рівняння поверхні нам часто доведеться користуватись рівнянням поверхні в однорідних координатах. Ліва частина рівняння поверхні другого порядку в однорідних координатах є однорідною функцією чотирьох змінних, або квадратичною формою. Отже, рівняння має вигляд:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+2a_{14}x_1x_4+$$
$$2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4+a_{44}x_4^2=0. \qquad (1.1)$$

Щоб перейти від рівняння (1.1) до загального рівняння поверхні другого порядку в звичайних декартових координатах, треба поділити обидві частини рівняння (1.1) на x_4 ($x_4\neq 0$ для власних точок простору) і замінити добуті відношення черезx,y,z на підставі формул:

$$x=\frac{x_1}{x_4};\ \ y=\frac{x_2}{x_4};\ \ z=\frac{x_3}{x_4}. \qquad (1.2)$$

Загальне рівняння поверхні другого порядку в декартових координатах має вигляд:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^3+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+$$
$$2a_{34}z+a_{44}=0. \qquad (1.3)$$

Це рівняння ми будемо досліджувати в наступних розділах, а зараз повернемось до рівняння поверхні (1.1) в однорідних координатах, позначивши його ліву частину через $2F$ і перегрупувавши його члени:

$$2F=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4)+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+$$
a24x4+x3a31x1+a32x2+a33x3+a34x4+x4a41x1+a42x2+a43x3+a44x4.

(1.4)

Вирази в дужках цієї рівності є половинами частинних похідних від $2F$ по x_1, x_2, x_3, x_4:

$$F_{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,$$
$$F_{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,$$
$$F_{x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \quad (1.5)$$
$$F_{x_4} = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4.$$

Визначник з матриці коефіцієнтів системи рівностей (1.5) позначимо через Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\,a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\,a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\,a_{34} \end{vmatrix}$$

Визначимо Δ називається дискримінантом квадратичної форми, що стоїть в лівій частині рівняння (1.1), а також дискримінантом загального рівняння (1.3) поверхні другого порядку в декартових координатах.

Підставляючи позначення (1.5) в рівність (1.4), ми дістанемо формулу Ейлера:

$$2F = x_1F_{x_1} + x_2F_{x_2} + x_3F_{x_3} + x_4F_{x_4}. \qquad (1.6)$$

Нехай $2F = 0$, дістанемо скорочений запис рівняння поверхні другого порядку в однорідних координатах:

$$x_1F_{x_1} + x_2F_{x_2} + x_3F_{x_3} + x_4F_{x_4} = 0. \qquad (1.7)$$

1.4. Перетин поверхні другого порядку з прямою

Теорема. Довільна пряма перетинає поверхню другого порядку в двох точках.

Доведення. Нехай поверхня другого порядку задана своїм загальним рівнянням:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^3 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y +$$
$$2a_{34}z + a_{44} = 0, \qquad (1.1)$$

а пряма – системою параметричних рівнянь:

$$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt \qquad (1.2)$$

Припустимо, що $\{l, m, n\}$ є напрямні косинуси прямої, тоді $|t|$ дорівнює відстані між довільною точкою $P(x; y; z)$ та її фіксованою точкою $P_0(x_0; y_0; z_0)$.

Щоб визначити координати точок перетину прямої з поверхнею, підставимо (1.2) в рівняння поверхні. Дістанемо:

$$a_{11}(x_0 + lt)^2 + a_{22}(y_0 + mt)^2 + a_{33}(z_0 + nt)^2 + 2a_{12}(x_0 + lt)(y_0 + mt) + 2a_{13}(x_0 + lt)(z_0 + nt) + 2a_{23}(y_0 + mt)(z_0 + nt) + 2a_{14}(x_0 + lt) + 2a_{24}(y_0 + mt) + 2a_{34}(z_0 + nt) + a_{44} = 0.$$

Розкривши дужки і звівши коефіцієнти при однакових степенях t, дістанемо квадратне рівняння:

$$Lt^2 + 2Mt + N = 0, \qquad (1.3)$$

де

$$L = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}m,$$
$$M = lF_x^0 + mF_y^0 + nF_z^0, \qquad (1.4)$$
$$N = a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0 + 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + 2a_{34}z_0 + a_{44}.$$

Зауважимо, що

$$F_x^0 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14},$$
$$F_y^0 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24},$$
$$F_z^0 = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}.$$

Розв'язавши рівняння (1.3), знайдемо два значення параметра t, які відповідають точкам перетину прямої з поверхнею. Підставляючи їх в параметричні рівняння прямої, визначимо шукані координати точок перетину. Квадратне рівняння має два розв'язки, отже, існує дві точки перетину прямої з поверхнею. Доведено.

Квадратне рівняння (1.3), виведене в попередньому розділі, може мати залежно від знака дискримінанта два дійсні і різні розв'язки, два дійсні і рівні або два уявні, комплексно спряжені розв'язки. Відповідно до цього пряма перетинає поверхню в двох точках, дотикається до неї або зовсім немає з нею спільних точок. Отже, дослідимо розв'язки рівняння (1.3) (Рис. 1.14).

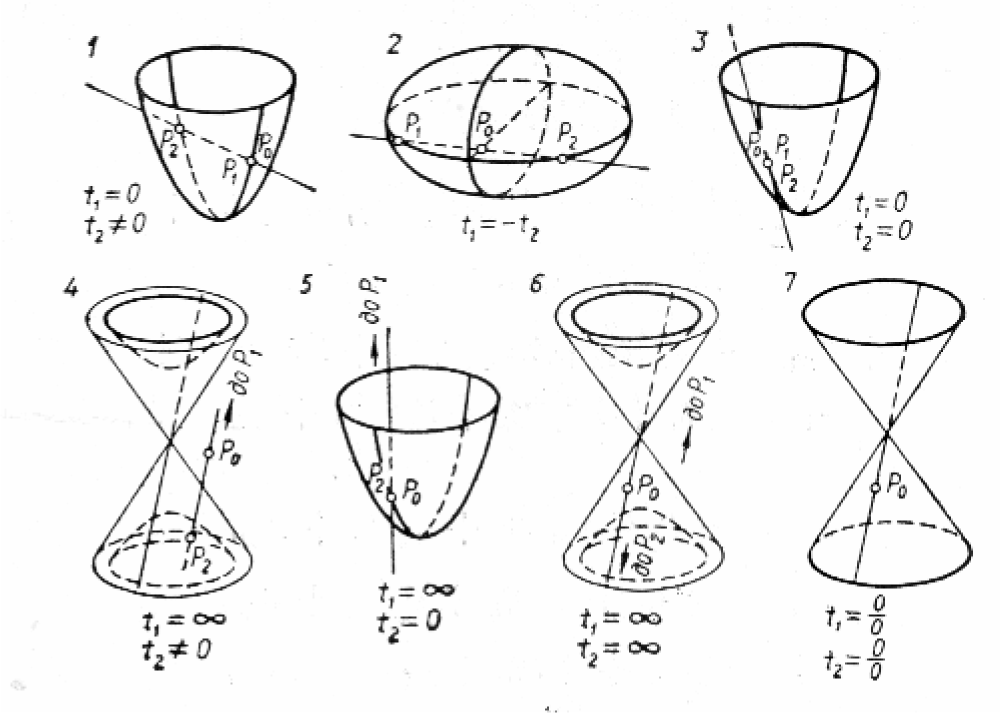


Рис. 1.14

1. Якщо вільний член рівняння (1.3) $N=0, L\neq 0, M\neq 0$, то рівняння $Lt^2+2Mt=0$ має розв'язки: $t_1=0, t_2=-\frac{2M}{L}$. Точка P_0 лежить на поверхні. Пряма перетинає поверхню в точці P_0 і ще в одній точці.

2. Якщо $M=0, L\neq 0, N\neq 0$, то рівняння $Lt^2+N=0$ має розв'язки: $t=\pm\sqrt{-\frac{N}{L}}$. Коли вони дійсні, то точка P_0 поділяє пополам хорду, яку поверхня відтинає від заданої прямої.

3. Якщо $M=N=0, L\neq 0$, то рівняння $Lt^2=0$ має розв'язки: $t_1=t_2=0$. Точка P_0 лежить на поверхні, а пряма дотикається до поверхні, а пряма дотикається до поверхні в цій точці.

4. Якщо $L=0, M\neq 0, N\neq 0$, то рівняння (1.3) зведеться до лінійного рівняння $2Mt+N=0$. Доцільно розглянути рівняння $2Mt+N=0$ як границю, до якої наближається квадратне рівняння (1.3), коли коефіцієнт $L\to 0$. При цьому один з розв'язків необмежено зростає. Отже $t_1\to\infty, t_2\to -\frac{N}{2M}$. Пряма перетинає поверхню в одній точці на скінченній відстані, а в другій в нескінченно віддаленій точці. Інакше кажучи, пряма має асимптотичний напрям відносно поверхні.

5. Якщо $L = N = 0, M \neq 0,$ то $t_1 = \infty, t_2 = 0,$ тобто пряма перетинає поверхню в точці P_0 і має відносно неї асимптотичний напрям.

6. Якщо $L = M = 0, N \neq 0,$ то $t_1 = \infty, t_2 = \infty,$ тобто пряма має асимптотичний напрям і дотикається до поверхні в нескінченності.

7. Якщо $L = M = N = 0,$ то рівняння (1.3) задовольняється при всіх значеннях параметра. Отже пряма лежить на поверхні.

Дотична площина

Нехай задана поверхня другого порядку

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (1.1)$$

і точка $P_0(x_0; y_0; z_0)$, яка лежить на поверхні.

<u>Теорема 1.1</u>. Геометричне місце прямих, які проходять через точку P_0 і дотикаються до поверхні (1.1) і цій точці, є площина. Ця площина називається дотичною площиною до поверхні в точці P_0.

Доведення. Напишемо рівняння в'язки прямих з центром в точці P_0:

$$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt \qquad (1.2)$$

і знайдемо умову дотику прямих в'язки з поверхнею. Згідно з висновками попереднього пункту у випадку дотику поверхні з прямою виконується співвідношення: $M = 0,\ N = 0$, в яких умова $N = 0$ свідчить про те, що точка P_0 лежить на поверхні, а умовою $M = 0$ встановлюється залежність між координатами напрямних векторів $u = \{l, m, n\}$ дотичних до поверхні:

$$lF_x^0 + mF_y^0 + nF_z^0 = 0 \qquad (1.3)$$

Виключаючи l, m, n з (1.2) і (1.3), ми замінюємо координати напрямних векторів дотичних пропорційними їх різницям: $x - x_0, y - y_0$ і $z - z_0$, які містять змінні координати точок дотичних, тобто знайдемо координати ГМТ дотичних:

$$(x - x_0)F_x^0 + (y - y_0)F_y^0 + (z - z_0)F_z^0 = 0. (1.4)$$

Це рівняння лінійне. Отже, геометричне місце дотичних до поверхні другого порядку в точці P_0 є площина. Доведено.

Означення. Нормаллю до поверхні в точці P_0 називається пряма, яка проходить через точку P_0 перпендикулярно до дотичної площини, проведеної до поверхні в цій точці.

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \qquad (1.5)$$

де, (x_0,y_0,z_0)є координати точки дотику, а $\{l,m,n\}$ визначимо з умови перпендикулярності нормалі до дотичної площини (1.4). Отже, остаточно рівняння нормалі має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{F_x^0}=\frac{y-y_0}{F_y^0}=\frac{z-z_0}{F_z^0}. \qquad (1.6)$$

Нехай, задана поверхня другого порядку:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+$$
$$2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad (1.7)$$

і точка $P_0(x_0;y_0;z_0)$, яка лежить на поверхні.

<u>Теорема 1.2.</u> Геометричне місце хорд поверхні другого порядку, які діляться заданою точкою навпіл є площина.

Доведення. Напишемо рівняння в'язки прямих з центром в точці P_0:

$$x=x_0+lt, y=y_0+mt, z=z_0+nt(1.8)$$

Нехай $\{l,m,n\}$ є координати ортів напрямних векторів прямих в'язки, тоді $|t|$ дорівнює відстані біжучої точки $P(x;y;z)$ прямої від точки $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

Використаємо умову, що $M=0$ для визначення напрямних коефіцієнтів прямої, від якої поверхня відтинає хорду, що в точці P_0 поділяється пополам. Напишемо цю умову в розгорнутому вигляді:

$$lF_x^0+mF_y^0+nF_z^0=0,(1.9)$$

Де F_x^0, F_y^0,F_z^0 є значення половин частинних похідних від лівої частини рівняння поверхні в точці P_0:

$$F_x^0=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14},$$
$$F_y^0=a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}, \qquad (1.10)$$
$$F_z^0=a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34,}$$

Визначимо з параметричних рівнянь хорди (1.8) її напрямні коефіцієнти через змінні координати точок цієї хорди і підставимо в умову (1.9). Після скорочення на $\frac{1}{t}$ дістанемо рівняння площини:

$$(x - x_0)F_x^0 + (y - y_0)F_y^0 + (z - z_0)F_z^0 = 0. \quad (1.11)$$

Доведено.

Зауваження. Площина, задана рівнянням (1.11), перетинає поверхню другого порядку по лінії другого порядку, для якої точка P_0 є центром. Спираючись на щойно проведені викладки, можна твердити, що площина (1.11) завжди дійсна. Але з умови $M = 0$, яку ми використали при виведенні її рівняння, видно, що $t = \pm\sqrt{-\frac{L}{N}}$,тобто для деяких положень точки P_0 кінці досліджуваних форм уявні. Отже площина (1.11) дотикається до неї.

Центр поверхні другого порядку

Означення. Центром поверхні другого порядку називається точка, в якій всі хорди поверхні, що через неї проходять, діляться навпіл.

Умова $M = 0$ для координат центра поверхні здійснюється незалежно від напряму хорд, тобто від величини l, m, n. А це можливо лише тоді, коли

$$F_x^0 = 0, F_y^0 = 0, F_z^0 = 0.(1.12)$$

Ці три рівняння становлять систему, з якої можна визначити координати центра поверхні. Запишемо їх в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34,} = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Складемо основну і розширену матриці системи:

$$M_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}a_{34} \end{pmatrix}$$

Позначимо через δ визначник основної матриці:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

І через $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ визначники розширеної матриці, до яких входять вільні члени рівняння (1.13):

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} a_{13} \\ a_{24} & a_{22} a_{23} \\ a_{34} & a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Якщо $\delta \neq 0$, то координати центра визначимо за формулами Крамера:

$$x_0 = -\frac{\delta_1}{\delta}, \;\; y_0 = -\frac{\delta_2}{\delta}, \;\; z_0 = -\frac{\delta_3}{\delta}.$$

Згідно з означенням центра поверхні другого порядку зрозуміло, що центром поверхні є її центр симетрії. Але при вивчені геометричних властивостей поверхонь другого порядку ми бачили, що деякі з них, наприклад параболоїд, не мають центра симетрії. Інші поверхні, навпаки мають нескінченну множину центрів. Отже, щоб розв’язати питання про існування і кількість центрів поверхні другого порядку, слід дослідити розв’язки системи рівнянь (1.13).

Можливі такі випадки:

1) Якщо ранги матриць M_0 і M дорівнюють 3, то визначник $\delta \neq 0$. Система рівнянь (1.13) має один і лише один розв’язок. Поверхня має центр, координати якого можна визначити за формулами Крамера.

2) Якщо ранг матриці $M_0 = 2$, а ранг матриці $M = 3$, то визначник $\delta = 0$, але серед визначників $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ є принаймні один, відмінний від нуля. Система (1.13) суперечна. Поверхня не має центра на скінченній відстані. Застосовуючи однорідні координати, можна показати, що центр поверхні є нескінченно віддаленою точкою.

3) Якщо ранги матриць M_0 і M дорівнюють 2, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$. Система рівнянь (1.13) неозначена і містить два незалежні рівняння. Геометричне місце центрів поверхні є площина, яка називається площиною центрів.

4) Якщо ранг матриці M_0 дорівнює 1, а ранг матриці $M = 2$, то система рівнянь (1.13) неозначена і містить два незалежні рівняння, проте система, складена з цих рівнянь, суперечна. Отже, геометричне місце центрів поверхні є нескінченно віддалена пряма.

5) Якщо ранги матриць M_0 і M дорівнюють 1, то всі мінори другого порядку визначників δ та $\delta_i(i = 1,2,3)$ дорівнюють нулю. Система рівнянь (1.13) неозначена і містить лише одне незалежне рівняння. Геометричне місце центрів поверхні є площина, яка називається площиною центрів.

Отже, всі поверхні другого порядку можна розділити на 5 типів, а саме:

а) Центральні поверхні, які мають центр і тільки один. Прикладом таких поверхонь можуть бути еліпсоїд, однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїди і конус.

б) Нецентральні поверхні, тобто поверхні, які в скінченній частині простору не мають центра. До таких поверхонь належать еліптичний та гіперболічний параболоїди.

в) Поверхні з прямою центрів. Пряму центрів мають еліптичний і гіперболічний циліндри і пара площин, що перетинаються. Прямою центрів є лінія перетину двох площин і вісь циліндра.

г) Поверхні з нескінченно віддаленою прямою центрів. Таку пряму центрів має параболічний циліндр.

д) Поверхня з площиною центрів. Площину центрів має вироджена поверхня другого порядку, тобто пара паралельних площин.

Діаметральна площина поверхні другого порядку

Теорема 1.3. Геометричне місце середин паралельних хорд поверхні другого порядку є площина.

Доведення. Нехай задано поверхню другого порядку

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 (1.14)$$

і довільний вектор $u = \{l, m, n\}$. Розглянемо сукупність всіх хорд поверхні, паралельних вектору u. Очевидно, що вектор u є їх спільний напрямний вектор. Позначимо через $P_0(x_0, y_0, z_0)$ середину однієї з хорд (рис.1.15).

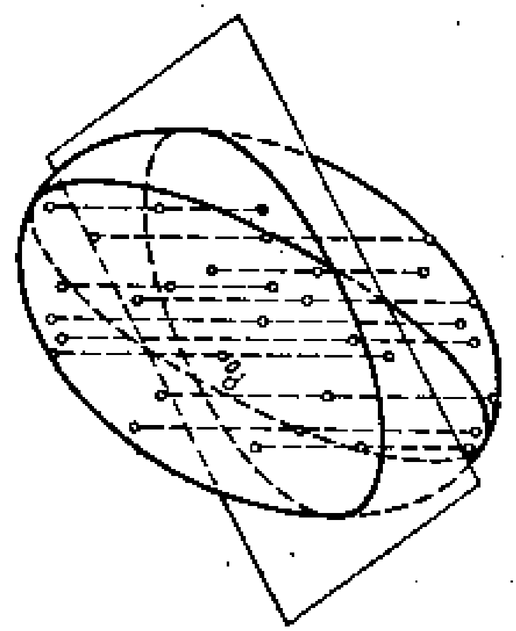


Рис. 1.15

Нагадаємо, що координати точки P_0 задовольняють умову:

$$lF_x^0 + mF_y^0 + nF_z^0 = 0.$$

Але точка P_0 є серединою довільної хорди, паралельної вектору u. Отже, рівняння

$$lF_x + mF_y + nF_z = 0 \qquad (1.15)$$

задовольняють координати середин всіх паралельних хорд, тобто воно є рівнянням шуканого геометричного місця. Рівняння (1.15) лінійне, тому воно виражає площину. Доведено.

Означення. Діаметральною площиною поверхні другого порядку, спряженою з напрямом вектора u, називається площина, яка проходить через середини хорд поверхні, паралельних вектору u.

Отже, рівняння (1.15) є рівнянням діаметральної площини поверхні (1.14), спряженої з напрямом вектора $u = \{l, m, n\}$. Всі діаметральні площини поверхні проходять через центр поверхні. Координати центра поверхні другого порядку, які визначаються з системи рівнянь:

$$F_x = 0, \;\; F_y = 0, \;\; F_z = 0,$$

задовольняють рівняння (1.15) тотожно при будь-яких значеннях напрямних коефіцієнтів l, m, n.

Таким чином, діаметральні площини центральної поверхні другого порядку утворюють в’язку площин з центром у центрі поверхні. До цієї в’язки належать і площини $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$. Площина $F_x = 0$ спряжена з напрямом вектора $i = \{1; 0; 0\}$, тобто з напрямом орта осі OX. Аналогічно площини $F_y = 0$ і $F_z = 0$ спряжені з напрямами векторів $j = \{0; 1; 0\}$і $k = \{0; 0; 1\}$.

Центр параболоїда є нескінченно віддалена точка. Отже, діаметральні площини параболоїда перетинаються попарно по паралельних прямих. Для циліндрів в’язка діаметральних площин вироджується в пучок, вісь якого є прямою центрів циліндра.

Напишемо рівняння діаметральної площини, спряженої з напрямом вектора $u = \{l, m, n\}$ в розгорнутому виді:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})l + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})m + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})n = 0 \quad (1.16)$$

або

$$(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n + a_{14})x + (a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n + a_{24})y + (a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n + a_{34})z = 0. \quad (1.17)$$

Отже, вектор її нормалі має координати:

$$n = \{a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n,\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n, a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n\ \}.$$

Прямі, які проходять через центр поверхні, називаються її діаметрами.

Діаметр, паралельний вектору u, тобто паралельний хордам, які площина (1.17) поділяє пополам, називається спряженим з площиною (1.17).

Асимптотичний конус поверхні другого порядку

Теорема 1.4. Геометричне місце прямих, які проходять через задану точку простору і мають асимптотичний напрям відносно поверхні другого порядку є конус.

Цей конус називається конусом асимптотичних напрямків поверхні.

Доведення. Нехай задано поверхню другого порядку

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1.18)$$

і довільна точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ простору.

Будемо проводити через точку P_0 прямі, які мають асимптотичний напрям відносно поверхні, тобто зустрічають поверхню в нескінченності. Запишемо рівняння цих прямих:

$$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt.$$

Нами було встановлено, що координати напрямних векторів прямих асимптотичного напряму задовольняють умову $L = 0$, або докладно:

$$a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn = 0 \quad (1.19)$$

Визначивши l, m, n з рівняння прямих через координати їх точок і підставивши ці значення в умову (1.19), матимемо рівняння шуканого геометричного місця:

$$a_{11}(x - x_0)^2 + a_{22}(y - y_0)^2 + a_{33}(z - z_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + 2a_{13}(x - x_0)(z - z_0) + 2a_{23}(y - y_0)(z - z_0) = 0 \quad (1.20)$$

Це рівняння однорідне відносно різниць $x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0$ і тому виражає конус. Доведено.

В окремому випадку, коли $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, дістанемо рівняння конуса асимптотичних напрямків з вершиною в початку координат:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0 \quad (1.21)$$

Головні напрями поверхні другого порядку

Означення. Головним напрямом поверхні другого порядку називається напрям вектора u, напрямного для системи паралельних хорд, перпендикулярних до спряжених площин.

Для центральної поверхні кожна система паралельних хорд містить діаметр і кожна система паралельних площин містить діаметральну площину. Отже, можна сказати, що головний напрям поверхні є напрямом діаметра, перпендикулярного до спряженої з ним діаметральної площини. Діаметр, який має головний напрям відносно поверхні, називається головним діаметром, а спряжена з ним діаметральна площина називається головною діаметральною площиною поверхні. Головним діаметром поверхні є вісь симетрії, а головною діаметральною площиною є площина симетрії поверхні. Коли поверхня нецентральна, то для головного діаметра може не існувати спряженої з ним діаметральної площини, і навпаки.

Покажемо, як визначити головні напрями поверхні, якщо задано її рівняння.

Запишемо умову перпендикулярності головного діаметра та спряженої з ним діаметральної площини:

$$\frac{a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n}{l}=\frac{a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n}{m}=\frac{a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n}{n}=\lambda, \tag{1.22}$$

звідки маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n=\lambda l, \\ a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n=\lambda m, \\ a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n=\lambda n, \end{cases} \tag{1.23}$$

Які задовольняють координатам вектора, що має головний напрям відносно поверхні. Перепишемо цю систему в такому вигляді:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)l+a_{12}m+a_{13}n=0 \\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)m+a_{23}n=0 \\ a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda)n=0, \end{cases} \tag{1.24}$$

Система (1.24) однорідна відносно l, m, n і тому може мати відмінні від нуля розв'язки тоді і тільки тоді, коли визначник, складений з коефіцієнтів рівняння системи, дорівнює нулю. Отже:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda) \end{vmatrix}=0(1.25)$$

Рівняння (1.25) називається характеристичним рівнянням поверхні другого порядку. Це рівняння кубічне відносно λ. Розв'язавши його, ми дістанемо три значення параметра λ. Підставляючи ці значення в рівняння (1.24), знайдемо три головні напрями поверхні.

Властивості розв'язків характеристичного рівняння:

<u>Теорема 1.5</u>. Нехай λ_1 та λ_2 не рівні між собою розв'язки характеристичного рівняння. Тоді відповідні їм головні напрями поверхні взаємно ортогональні.

Теорема 1.6. Розв’язки характеристичного рівняння поверхні другого порядку завжди дійсні. Нульовому розв’язку характеристичного рівняння відповідає асимптотичний головний напрям.

РОЗДІЛ 2. ЗВЕДЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИДУ

2.1. Спрощення рівнянь окремих поверхонь

Спрощення рівняння центральних поверхонь

Нехай задано поверхню другого порядку загальним рівнянням:

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$

Обчислимо інваріанти I_4 та I_3. Нехай кожен з них не дорівнює нулю. Отже, поверхня не вироджена, центральна. Паралельним рухом координатного базису перенесемо початок координат у центр. В рівнянні зникнуть члени першого порядку. Тоді, повернемо координатний базис так, щоб його осі мали головні напрями поверхні, тоді зникнуть члени з добутками змінних. В результаті цих перетворень отримаємо канонічне рівняння поверхні. Головні напрями є напрямами осей симетрії поверхні, а головні діаметральні площини є її площини симетрії, оскільки, канонічне рівняння є рівнянням поверхні, віднесеної до осей симетрії. Коефіцієнти при квадратах змінних канонічному рівнянні дорівнюють розв'язкам характеристичного рівняння, а вільний член $a''_{44} = -\frac{I_4}{I_3}$.

<u>Приклад 2.1.</u> Визначити вид поверхні і спростити рівняння $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$.

Обчислимо I_4:

$$I_4 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & -6 \\ -2 & 4 & -6 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -72 \cdot 3 = -216.$$

Поверхня невироджена.

Обчислимо I_3

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 3 + 3 - 1 - 1 - 45 = -36.$$

Поверхня центральна.

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(5-\lambda) + 3 - 3 + (1-\lambda) - (1-\lambda) - 9(5-\lambda) = 0$$

Отримали рівняння:

$$(1-\lambda)^2(5-\lambda) - 9(5-\lambda) = 0$$

Спробуємо підібрати корінь. Нехай:

$$\lambda_1 = 0{:}\ \ 1 \cdot 5 - 9 \cdot 5 \neq 0$$

$$\lambda_1 = -1{:}\ \ 4 \cdot 6 - 9 \cdot 7 \neq 0$$

$$\lambda_1 = -2{:}\ \ 9 \cdot 7 - 9 \cdot 7 = 0$$

Отже, методом підстановки отримали, що $\lambda_1 = -2$.

Поділивши $(1-\lambda)^2(5-\lambda) - 9(5-\lambda) = 0$ на $(\lambda + 2)$ отримали квадратне рівняння:

$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0,$$

Звідки $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Вільний член

$$a_{44}^{''} = \frac{-72 \cdot 3}{-36} = 6.$$

Канонічне рівняння поверхні має вигляд:

$$-2x^{''2} + 3y^{''2} + 6z^{''2} + 6 = 0,$$

або

$$\frac{x''^2}{3}-\frac{y''^2}{2}-z''^2=1$$

Отримана поверхня – двопорожнинний гіперболоїд.

<u>Приклад 2.2.</u> Визначити вид поверхні і спростити її рівняння

$$x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0.$$

Обчислимо I_4:

$$I_4=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4-7\\ 2 & -2 & -2-2\\ -4 & -2 & 1\ \ 7\\ -7 & -27 & 16\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & -3-6\\ 2 & 0 & 0\ \ 0\\ -4 & -6 & -3\ 3\\ -7 & -90 & 9\end{vmatrix}=-162\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ -2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Поверхня вироджена.

Обчислимо I_3:

$$I_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{vmatrix}=54.$$

Поверхня центральна.

Єдина вироджена центральна поверхня є конус.

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -4\\ 2 & -2-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(-3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-18)=0;$$

$$\lambda_1=-3;\quad \lambda_2=-3;\quad \lambda_3=6.$$

Запишемо канонічне рівняння конуса:

$$-3x''^2-3y''^2+6z''^2=0$$

або

$$x''^2+y''^2-2z''^2=0 \text{ – конус обертання.}$$

Спрощення рівняння параболоїда

Щоб звести рівняння параболоїда до канонічного виду, треба перенести початок координат в його вершину. При цьому зникне вільний член в рівнянні поверхні. Потім поворотом координатного базису треба надати його осям головних напрямів відносно поверхні. Нехай при цьому вісь$O^{''}Z^{''}$буде напрямлена по осі параболоїда. Тоді в рівнянні параболоїда зникнуть члени з $z^{''2}$, члени з добутками змінних і члени з $x^{''}$і $y^{''}$. Дістанемо канонічне рівняння параболоїда. Але, користуючись інваріантами, можна відразу визначити коефіцієнти канонічного рівняння. Розв'язавши канонічне рівняння, матимемо $a_{11}^{''}=\lambda_1,\ a_{22}^{''}=\lambda_2,\ a_{33}^{''}=\lambda_3=0,\ a_{34}^{''}$ визначимо з формули $a_{34}^{''}=\pm\sqrt{-\frac{I_4}{\lambda_1\lambda_2}}$.Знак плюс або мінус вибираємо залежно від орієнтації осі $O^{''}Z^{''}$. Після цього напишемо канонічне рівняння параболоїда:

$$\lambda_1 x^{''2}+\lambda_2 y^{''2}=2\sqrt{-\frac{I_4}{\lambda_1\lambda_2}}z^{''}.$$

Приклад 2.3. Визначити вид поверхні і спростити її рівняння

$$2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12x+4y+8z-1=0.$$

Обчислимо I_4:

$$I_4=\begin{vmatrix}2 & 6 & 0 & 6\\ 6 & 10 & 4 & 2\\ 0 & 4 & -24 & \\ 6 & 24 & -1 & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & 6\\ 6 & 8 & 4 & 10\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 6 & 34 & 7 & \end{vmatrix}=-8\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 4 & 5\\ 6 & 3 & 7\end{vmatrix}=256.$$

Поверхня невироджена.

Обчислимо I_3:

$$I_3=\begin{vmatrix}2 & 6 & 0\\ 6 & 10 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{vmatrix}=0.$$

Поверхня нецентральна, тобто параболоїд.

Складемо характеристичне рівняння:

$$I_1=10,\ \ I_2=-56.$$

Отже,

$$\lambda^3-10\lambda^2-56\lambda=0;$$

Тобто один з розв'язків, наприклад λ_3, дорівнює нулю. Рівняння зводиться до квадратного:

$$\lambda^2-10\lambda-56=0;\ \ \lambda_1=14;\ \ \lambda_2=-4.$$

a_{34} знайдемо за формулою:

$$a_{34}^{"} = \pm\sqrt{\frac{8\cdot 32}{14\cdot 4}} = \pm\frac{16}{\sqrt{14}}.$$

Таким чином спрощене рівняння параболоїда має вигляд:

$$14x^{"2} - 4y^{"2} \pm \frac{16}{\sqrt{14}}z^{"} = 0$$

Скоротимо на 2 і виберемо додатній напрям осі *OZ* так, щоб було

$$7x^{"2} - 2y^{"2} = \frac{8}{\sqrt{14}}z^{"}.$$

Досліджувана поверхня є гіперболічний параболоїд.

Спрощення рівняння циліндра

Якщо ми встановимо, що характеристичне рівняння поверхні має два розв’язки, відмінні від нуля, а $I_4 = 0$, тобто поверхня вироджена, то можуть бути два випадки:

а) циліндр;

б) пара площин, що перетинаються.

Обидві ці поверхні мають лінію центрів.

Отже, перенесемо початок координат в будь-який центр поверхні, а потім координатний базис так, щоб одна з осей, наприклад вісь $O^{"}Z^{"}$, була напрямлена вздовж осі циліндра і щоб інші дві мали головні напрями відносно поверхні. Рівняння поверхні відносно цього координатного базису і буде канонічним. Але простіше знайти канонічне рівняння за допомогою інваріантів. Коефіцієнти при$x^{"2}$ і$y^{"2}$в спрощеному рівнянні будуть розв’язками характеристичного рівняння, а вільний член ми знайдемо, коли підставимо в ліву частину рівняння поверхні координати будь-якого її центра. Отже рівняння матиме вигляд:

$$\lambda_1 x^{"2} + \lambda_2 y^{"2} = 2F^0.$$

<u>Приклад 2.4.</u> Визначити вид поверхні та спростити її рівняння:

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4zx + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0.$$

Обчислимо I_4:

$$I_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Поверхня вироджена.

Обчислимо I_3:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Поверхня має лінію або площину центрів. Складемо характеристичне рівняння.

$$I_1 = 9,\ \ I_2 = 9 + 9 = 18,\ \ I_3 = \delta = 0.$$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda = 0; \qquad \lambda_3 = 0.$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0; \qquad \lambda_1 = 3,\ \ \lambda_2 = 6.$$

Поверхня є циліндром або парою площин, які перетинаються, тобто має лінію центрів.

Напишемо систему рівнянь для визначення центра поверхні:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0, \\ -x + 5y + z - 5 = 0, \\ -2x + y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Система містить лише два незалежні рівняння. Тому візьмемо два рівняння:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0, \\ -x + 5y + z - 5 = 0. \end{cases}$$

Щоб дістати координати будь-якого центра поверхні, припустимо, що $z = 0$. Розв'язуючи отриману систему, знайдемо:

$$x = 0,\ \ y = 1.$$

Підставивши координати центра в ліву частину рівняння поверхні, знайдемо вільний член рівняння:

$$a_{44}^{''} = 2F^0 = -6.$$

Конічне рівняння поверхні:

$$3x^{''2} + 6y^{''2} - 6 = 0,$$

або

$$x''^2 + 2y''^2 = 2.$$

Отримана поверхня – еліптичний циліндр.

Спрощення рівняння параболічного циліндра

Коли характеристичне рівняння поверхні має лише один розв'язок, відмінний від нуля, то поверхня є параболічним циліндром або парою паралельних площин. В обох випадках сукупність старших членів рівняння поверхні утворює повний квадрат.

Справді, в цьому випадку $I_3 = I_4 = 0$, при чому

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

Тому що ранг матриці

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Є одиниця, тобто всі її мінори другого порядку дорівнюють нулю. Звідси маємо:

$$a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}, \;\; a_{13} = \sqrt{a_{11}a_{33}}, \;\; a_{23} = \sqrt{a_{22}a_{33}}.$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2\sqrt{a_{11}a_{22}}xy + 2\sqrt{a_{11}a_{33}}xz + 2\sqrt{a_{22}a_{33}}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Це має місце і для параболічного циліндра, і для пари паралельних площин. Але в першому випадку ліва частина рівняння не розкладається на два лінійні множники, а в другому – розкладається внаслідок того, що в цьому випадку під знак квадрата можна внести всі члени, що містять змінні.

Для спрощення рівняння параболічного циліндра ми використаємо метод виділення повного квадрата.

<u>Приклад 2.5</u>. Визначити вид поверхні

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0 \qquad (2.1)$$

і спростити її рівняння.

Розв'язання. Група старших членів в рівнянні поверхні утворює повний квадрат:

$$(x + y + 2z)^2 = 6z - 1 \; (2.1')$$

Отже, її рівняння виражає параболічний циліндр або пару паралельних площин. Ліва частина рівняння (2.1) не розкладається на множники, тобто поверхня є параболічним циліндром.

Покажемо, що вираз в дужках під знаком квадрата в рівнянні$(2.1^{'})$ ліва частина є однією з діаметральних площин параболічного циліндра.

Напишемо рівняння діаметральної площини, спряженої з напрямом вектора $u = \{l, m, n\}$:

$$lF_x + mF_y + nF_z = 0,$$

де $F_x = x + y + 2z,\ \ F_y = x + y + 2z,\ \ F_z = 2x + 2y + 4z - 3.$

Рівняння діаметральної площини параболічного циліндра:

$$l(x + y + 2z) + m(x + y + 2z) + n(2x + 2y + 4z - 3) = 0,$$

$$(x + y + 2z)(l + m + 2n) - 3n = 0,$$

$$x + y + 2z = \frac{3n}{l + m + 2n}.$$

Всі діаметральні площини параболічного циліндра паралельні. Площина $x + y + 2z$ є однією з них.

Розв’яжемо рівняння цієї площини і рівняння циліндра:

$$\begin{cases} (x + y + 2z)^2 = 6z - 1, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Система рівнянь (2.2) еквівалентна системі :

$$\begin{cases} 6z - 1 = 0, \\ x + y + 2z = 0, \end{cases} \qquad (2.3)$$

Тобто виражає прямолінійну твірну циліндра.

Покажемо, що площина$6z - 1$ дотикається до циліндра вздовж цієї твірної. Для цього розв’яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x + y + 2z)^2 = 6z - 1, \\ 6z - 1 = 0, \end{cases}$$

яка еквівалентна системі

$$\begin{cases} (x + y + 2z)^2 = 0, \\ 6z - 1 = 0. \end{cases}$$

Отже, площина $6z-1=0$ перетинає параболічний циліндр по двох прямолінійних твірних, які суміщаються в одну пряму (2.3), тобто площина $6z-1=0$ дотична. Площини $6z-1=0$ і $x+y+2z$ не перпендикулярні. Головна діаметральна площина перпендикулярна до відповідної дотичної площини.

Користуючись тим, що всі діаметральні площини паралельні, тобто, що їх рівняння різняться лише вільними членами, додамо в дужках у рівнянні (2.1) стале число h, відповідно додавши його і до правої частини:

$$(x+y+2z+h)^2 = 2hx+2hy+2(2h+3)z+h^2-1. \qquad (2.4)$$

Підберемо h так, щоб площина

$$x+y+2z+h=0 \qquad (2.5)$$

була головною діаметральною площиною, тобто площиною симетрії параболічного циліндра. Для цього використаємо умову перпендикулярності площини симетрії і дотичної площини

$$2hx+2hy+2(2h+3)z+h^2-1. \qquad (2.6)$$

Запишемо цю умову:

$$2h+2h+4(2h+3)=0,$$

звідки $h=-1$.

Таким чином, рівняння параболічного циліндра можна записати так:

$$(x+y+2z-1)^2 = -2(x+y-z). \qquad (2.7)$$

Рівняння $x+y+2z-1=0$ і $x+y-z=0$ є рівняння головної діаметральної і дотичної площини циліндра. Остання дотикається до циліндра вздовж прямолінійної твірної, по якій головна діаметральна площина перетинає поверхню.

Нехай головна діаметральна площина є координатною площиною $X'O'Z'$, а головна дотична площина – координатна площина $Y'O'Z'$. Тоді віссю $O'Z'$ буде прямолінійна твірна циліндра. Площину $X'O'Y'$ проведемо перпендикулярно до цієї твірної через будь-яку її точку.

Відхилення довільної точки $M(x,y,z)$ простору від площини $X'O'Z'$ є її ордината:

$$\frac{x+y+2z-1}{\sqrt{6}} = y',$$

а відхилення точки $M(x, y, z)$ від площини $Y'O'Z'$ є її абсциса:

$$\frac{x+y-z}{\pm\sqrt{3}} = x'.$$

З цих двох рівностей дістанемо:

$$x+y+2z-1 = \sqrt{6}y',$$

$$x+y-z = \pm x'\sqrt{3}.$$

Підставляючи ці вирази в рівняння циліндра (2.7) дістанемо:

$$6y'^2 = \frac{x'}{\sqrt{3}},$$

або остаточно:

$$y'^2 = \frac{x'}{\sqrt{3}.}$$

Це і є канонічне рівняння параболічного циліндра.

2.2. Визначення рівняння пари площин, заданих рівнянням другого порядку

Коли загальне рівняння другого степеня виражає пару площин, які перетинаються або паралельні, то недоцільно зводити рівняння до канонічного виду. Краще розкласти ліву частину рівняння на два лінійні множники і визначити рівняння площин відносно заданого координатного базису, що зручніше зробити методом виділення квадратів.

Приклад 2.6. Визначити вид поверхні:

$$2x^2 - y^2 - z^2 + xy - xz + 2yz + x + y - z = 0.$$

Обчислимо I_4:

$$I_4 = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Поверхня вироджена.

Обчислимо I_3:

$$I_4 = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad I_2 = -\frac{9}{2} \neq 0.$$

Отримана поверхня – циліндр або пара площин, що перетинаються.

Координати центра поверхні треба шукати з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} = 0, \\ \frac{1}{2}x - y + z + \frac{1}{2} = 0, \\ -\frac{1}{2}x + y - z - \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Запишемо два незалежні рівняння:

$$\begin{cases} 4x + y - z + 1 = 0, \\ x - 2y + 2z - \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Припустивши, що $z = 0$, дістанемо:

$$x = -\frac{1}{3}, \ \ y = \frac{1}{3}; \quad a_{44} = \frac{1}{2}(x + y - z) = 0.$$

Рівняння поверхні виражає пару площин, які перетинаються. Виділимо в рівнянні поверхні повний квадрат. Для зручності перепишемо рівняння в такому вигляді:

$$y^2 + z^2 - 2x^2 - xy + xz - 2yz - x - y + z = 0.$$

Будемо розглядати y^2 як квадрат першого числа, а $(-xy), (-2yz), (-y)$ як подвійні добутки. Ті члени, яких не вистачає – додамо. Отримаємо:

$$\left(y - z - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = 0.$$

Помножимо обидві частини рівняння на 4 і виділимо другий квадрат:

$$4\left(y - z - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - (3x + 1)^2 = 0.$$

Тепер розкладемо ліву частину рівняння на лінійні множники:

$$\left[2\left(y - z - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) - (3x + 1)\right]\left[2\left(y - z - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) + (3x + 1)\right] = 0.$$

Отже, рівняння площин, що виражають рівняння, задане в умові:

$$2x - y + z + 1 = 0 \text{ і } x + y - z = 0.$$

2.3. Визначення виду поверхні другого порядку методом виділення повних квадратів.

Методом виділення повних квадратів можна визначити вид будь-якої поверхні другого порядку. Цей метод ґрунтується на тому, що кількість виділених з рівняння квадратів і їх знаки не залежать від того, відносно якої системи координат складено рівняння поверхні (закон інерції квадратичних форм). Кількість виділених з рівняння поверхні квадратів завжди дорівнює їх кількості в канонічному рівнянні поверхні. Стосовно знаків – аналогічно.

<u>Приклад 2.7</u>. Визначити вид поверхні:

$$x^2 + 4y^2 - z^2 - 10x - 16y + 6z + 16 = 0.$$

Виділимо квадрати:

$$(x - 5)^2 + 4(y - 2)^2 - (z - 3)^2 = 16.$$

Отримана поверхня – однопорожнинний гіперболоїд.

<u>Приклад 2.8</u>. Визначити вид поверхні:

$$x^2 + 3y^2 - 6y + z + 1 = 0.$$

Виділимо квадрати:

$$x^2 + 3(y - 1)^2 = 2 - z.$$

Отримали еліптичний параболоїд.

Приклад 2.9. Визначити вид поверхні:

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 1 = 0.$$

Виділимо квадрати:

$$z^2 - (x + y)^2 = 1$$

Отримали рівняння гіперболічного циліндра.

Приклад 2.10. Визначити вид поверхні:

$$\boldsymbol{z = xy.}$$

В цьому випадку для виділення квадрата треба застосувати штучний метод. Припустимо, що

$$\boldsymbol{x = u + v, \;\; y = u - v.}$$

Отже,

$$\boldsymbol{u = \frac{x + y}{2}, \;\; v = \frac{x - y}{2}, \;\; z = (u + v)(u - v) = u^2 - v^2.}$$

Замінимо $\boldsymbol{u}$ і $\boldsymbol{v}$ ще раз через $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{4z = (x + y)^2 - (x - y)^2.}$$

Отримали рівняння гіперболічного параболоїда.

РОЗДІЛ 3. ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

3.1. Дослідження загального рівняння поверхні другого порядку засобами MathCad

Графічні можливості Mathcad

Одним із цікавих і ефективних застосувань математичних пакетівє використання їхніх графічних можливостей при розв'язані різних задач: для візуалізації результатів досліджень, графічної інтерпретації даних і т.д.

Графічні області в Mathcad поділяються на три основних типи

- двовимірні графіки,
- тривимірні графіки,
- імпортовані графічні образи.

Двовимірні і тривимірні графіки будуються самим MathCAD на підставі оброблених даних. У пакеті Mathcad представлений великий набір інструментів для реалізації графічних методів в математиці. Графіки в Mathcad є універсальними й легкими у використанні. Пакет дозволяє будувати графіки різних типів: графіки в декартових координатах, графіки в полярних координатах, будувати поверхні, лінії рівня, карти векторних полів, тривимірні гістограми, точкові графіки. Осі графіків можуть мати лінійний або логарифмічний масштаб. На графіки може бути нанесена координатна сітка, є можливість визначати координати точок на графіку, збільшувати або зменшувати окремі фрагменти графіка. Починаючи з шостої версії Mathcad має можливість створювати анімаційні графіки.

Для створення графіків у системі Mathcad є програмний графічний процесор. Основну увагу при його розробці було приділено забезпеченню простоти побудови графіків та їх модифікацій за допомогою відповідних опцій.

Для побудови графіків використовуються шаблони. Їхній перелік містить підменю Graphy позиції Insert головного меню. Більшість параметрів графічного процесора, необхідних для побудови графіків, за замовчуванням задається 3 автоматично. Тому для початкової побудови того або іншого виду досить задати тип графіка. У підменю Graph міститься список із семи основних типів графіків.

Графіки будь-якого виду, як будь-які об'єкти документа, можна виділяти, заносити в буфер обміну, викликати їх звідти й переносити в будь-яке нове місце документа. Їх можна й просто перетаскувати з місця на місце курсором миші, а також розтягувати по горизонталі, по вертикалі й по діагоналі, чіпляючись за спеціальні маркери виділених графіків курсором миші.

Порядок дій при побудові всіх графіків однаковий. Після вибору шаблона побудови графіка, у робочому документі відкривається шаблон для побудови графіка з полями для запису, які заповнити для побудови графіка. Коли графік визначений (заповнені всі позначені позиції), те для побудови графіка при автоматичному режимі обчислень досить клацнути мишею поза полем графіка.

Тривимірні графіки (3D-графіки) відображають функцію двох змінних вигляду. У Mathcad 3D- графіки можна будувати 3 способами.

Автоматична швидка побудова. Задаємо значення функції двох змінних. Викликаємо шаблон 3D- графіка. Вписуємо ім’я без її аргументів у шаблон, відводимо візир миші за межі області графіка , натискуємо ліву кнопку миші, отримуємо графік, інтервали зміни аргументів функції система визначає сама без втручання користувача.

Наочність подання поверхні у тривимірному просторі залежить від багатьох факторів: масштабу побудов; кутів повороту фігури відносно осей; використання алгоритму видалення ліній, які знаходяться на задньому плані; використання заливки та інших. Реалістичність зображень на плоскому малюнку поверхні тіл у тривимірному просторі залежить здебільшого від кутів огляду. Для обертання будь-якої тривимірної фігури достатньо виділити її зображення та, натиснувши і втримуючи ліву клавішу миші, почати переміщувати мишу по поверхні стола. Фігура почне обертатись. Такий рух фігури в просторі дає можливість, практично без зусиль, підібрати найоптимальніше положення фігури в просторі, при якому найбільш чітко видно просторові особливості фігури

Побудова графіків за допомогою вбудованих функцій *CreateMesh* і *CreateSpace*.

При побудові тривимірних графіків у ранніх версіях MathCAD поверхню потрібно було визначити математично. У версіях MathCAD-2000 і вище застосовують функції *CreateMesh* і *CreateSpace*.

$CreateMesh\,(F,\, x_0, x_1, y_0, y_1, xgrid, ygrid, fmap)$ створює матрицю аплікат поверхні з сіткою і визначеною функцією F: x_0, x_1, y_0, y_1 — діапазон зміни змінних, $xgrid, ygrid$ — розміри сітки змінних, $, fmap$ — функція відображення. Функція $CreateMesh$ за замовчуванням створює сітку поверхні 20×20 точок.

Побудова зображень поверхонь другого порядку за допомогою MathCad

Для побудови зображень використовуються канонічні рівняння, отримані із загального рівняння поверхонь другого порядку шляхом перетворень, описаних в розділі 2.

Приклад 2.1. Маємо двопорожнинний гіперболоїд:

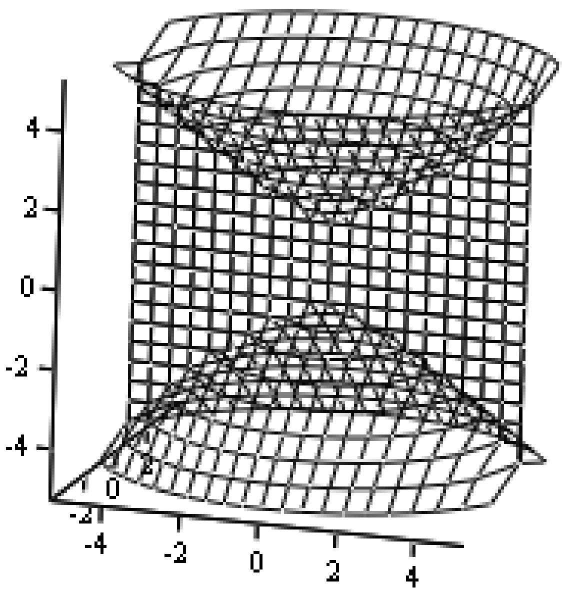
$$\frac{x^{"2}}{3} - \frac{y^{"2}}{2} - z^{"2} = 1.$$

Спосіб 1. Виразимо z як функцію від (x, y):

$$z1(x,y) := \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(2x)^2 - 3 \cdot y^2 - 6}{6}} & \text{if } (2x)^2 - 3 \cdot y^2 - 6 > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$z2(x,y) := \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{(2x)^2 - 3 \cdot y^2 - 6}{6}} & \text{if } (2x)^2 - 3 \cdot y^2 - 6 > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Отримаємо графік (Рис 3.1.).



z1, z2

Рис.3.1

Спосіб 2. Виразимо x як функцію від (z, y):

$$f(y, z) := 3 \cdot \sqrt{\frac{y^2 + 2 \cdot z^2 + 2}{2}}$$

$$g(y, z) := -\left(3 \cdot \sqrt{\frac{y^2 + 2 \cdot z^2 + 2}{2}}\right)$$

Отримаємо графік (Рис. 3.2.)

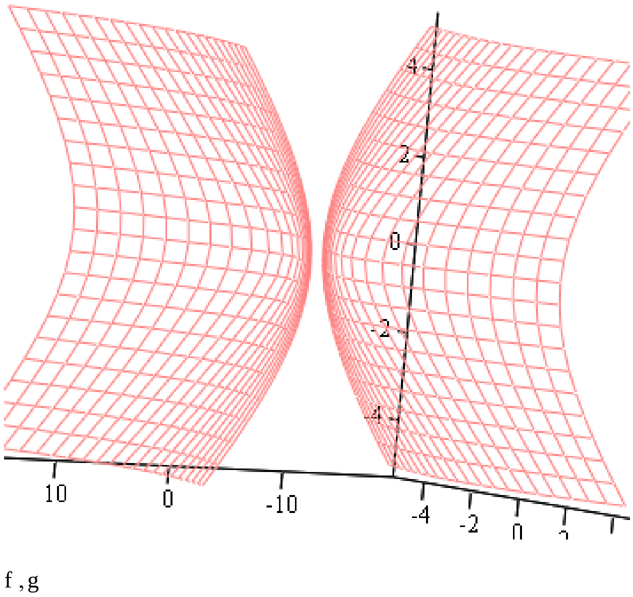


Рис. 3.2.

Приклад 2.2. Маємо рівняння конуса:

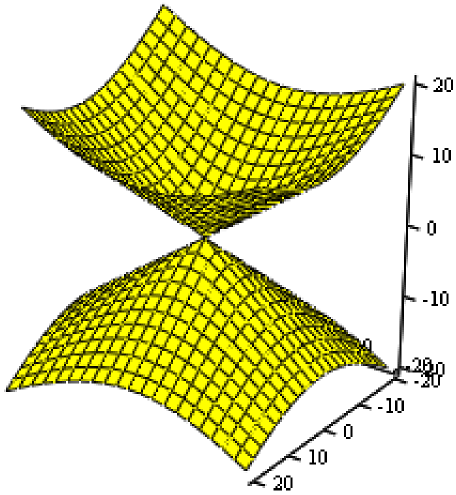
$$x''^2 + y''^2 - 2z''^2 = 0.$$

Виразимо z'' через x'' та y'':

$$f(x,y) := \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2}}$$

$$g(x,y) := \frac{-\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2}}$$

Отримаємо графік (Рис. 3.3):



f , g

Рис. 3.3.

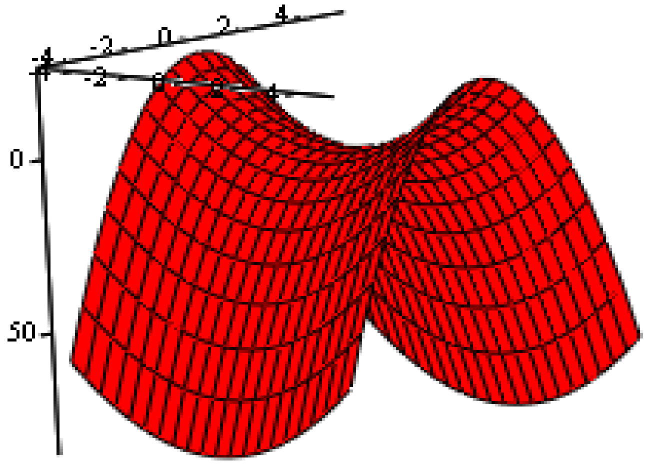
Приклад 2.3. Маємо рівняння гіперболічного параболоїда:

$$7x''^2 - 2y''^2 = \frac{8}{\sqrt{14}} z''.$$

Виразимо z'' через x'' та y'':

$$f(x,y) := \frac{\left(7 \cdot x^2 - 2 \cdot y^2\right) \cdot \sqrt{14}}{8}$$

Отримаємо графік (Рис. 3.4.):



f

Рис. 3.4.

Приклад 2.4. Маємо рівняння еліптичного циліндра:

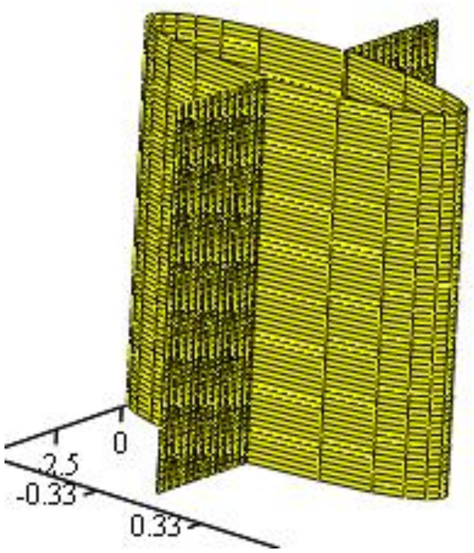
$$x''^2 + 2y''^2 = 2$$

Виразимо одну змінну через іншу і отримаємо

$$y1(x,z) := \begin{vmatrix} \sqrt{1-\frac{x^2}{2}} \ \text{ if } \ 1-\frac{x^2}{2} > 0 \\ 0 \ \text{ otherwise} \end{vmatrix}$$

$$y2(x,z) := \begin{vmatrix} -\sqrt{1-\frac{x^2}{2}} \ \text{ if } \ 1-\frac{x^2}{2} > 0 \\ 0 \ \text{ otherwise} \end{vmatrix}$$

Отримаємо графік (Рис. 3.5.):



y1, y2

Рис. 3.5.

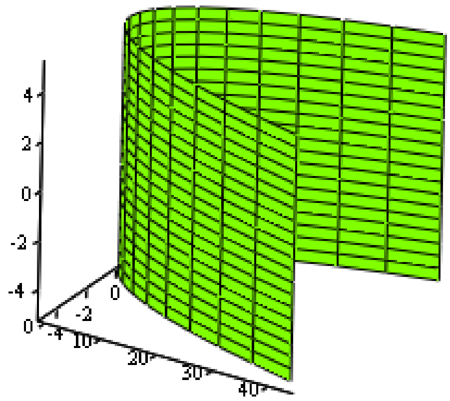
Приклад 2.5. Маємо рівняння параболічного циліндра:

$$y'^2 = \frac{x'}{\sqrt{3}}.$$

Для зручності виразимо x' через y':

$$x' = y'^2 \cdot \sqrt{3}$$

Отримаємо графік (Рис.3.6.):



x

Рис. 3.6.

Приклад 2.6. Маємо рівняння двох площин:

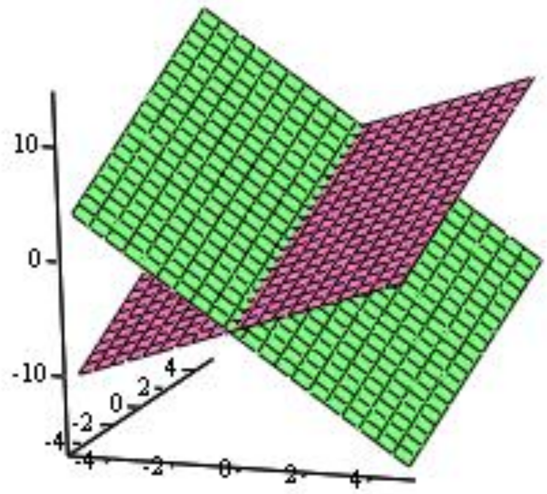
$$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Запишемо:

$f1(x,y) := y - 2 \cdot x - 1$

$f2(x,y) := x + y$

Отримуємо графік (Рис. 3.7.):



f1 , f2

Рис. 3.7.

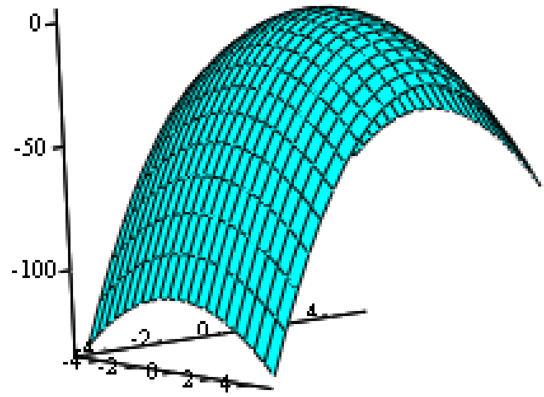
Приклад 2.8. Маємо рівняння еліптичного параболоїда:

$$x^2 + 3(y-1)^2 = 2 - z.$$

Виразимо z як функцію від (x, y):

$f(x,y) := 2 - x^2 - 3 \cdot (y-1)^2$

Отримаємо графік (Рис. 3.8.):



f

Рис. 3.8.

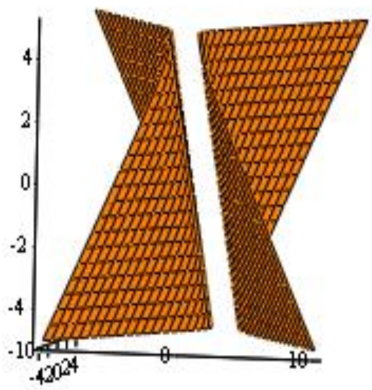
Приклад 2.9. Маємо рівняння гіперболічного циліндра:

$$z^2 - (x + y)^2 = 1$$

Виразимо z як функцію від (x, y):

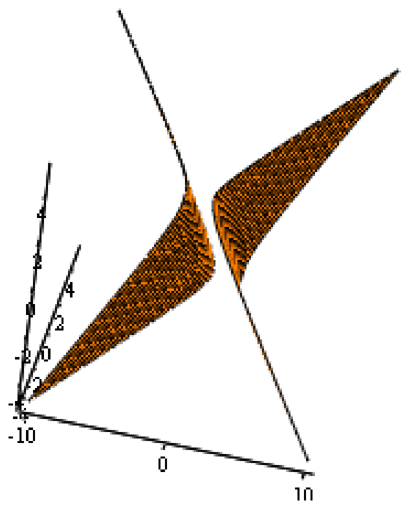
$$z(x, y) := \sqrt{1 + (x + y)^2}$$

Отримаємо графік (Рис. 3.9.а) та (Рис. 3.9.б):



z, g

Рис. 3.9. а



z, g

Рис.3.9.б

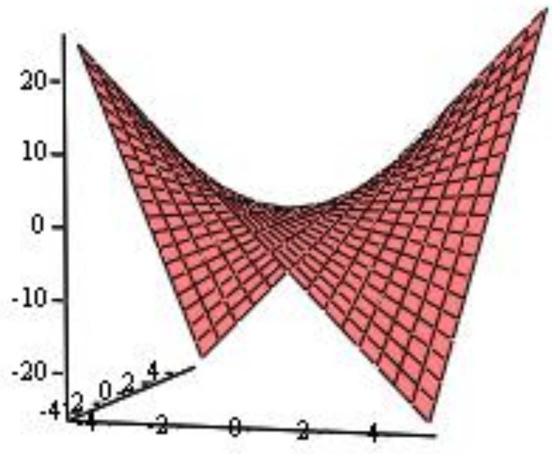
Приклад 2.10. Маємо поверхню гіперболічного параболоїда:

$$4z = (x + y)^2 - (x - y)^2.$$

Запишемо:

$$f(x,y) := \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$$

Отримаємо графік (Рис. 3.10.):



f

Рис. 3.10.

3.2 Застосування в архітектурі

Поверхні другого порядку завжди мали широке прикладне застосування.

Виокремимо серед таких поверхні циліндричні та покажемо деякі застосування в архітектурі.

Круглий будинок – це пам’ятка архітектури, яку було створено на початку XIX століття, знаходиться у селі Головчино Грайворонського р-ну Білгородської області (Росія). Цегляна споруда складається із двох циліндрів – великого (діаметр 26 м) і малого (діаметр близько 10 м). Малий знаходиться всередині великого, підіймається над ним і завершується куполом (див.

Додаток 2). Усередині малого циліндра всі поверхи поєднані сходами. Нині в даній будівлі знаходиться музей.

Будинок Мельникова (див. Додаток 3).

Ідея створити будинок, який складається із 5 циліндрів, виникла в архітектора К.С. Мельникова, коли він проектував один з шести клубів, побудованих ним у Москві. Проект не ухвалили, і тоді Мельников, для здійснення свого задуму, вирішив побудувати на власні кошти будинок для своєї родини. Керівництво столиці виділило архітекторові ділянку площею 720 кв. м. у Кривоарбатському провулку для будівництва. Тож восени 1929 року родина Мельникових оселилася у новій будівлі.

Будинок – фігура, яка складається із двох вертикально побудованих циліндрів різної висоти і одного діаметру, що перетинаються. Передня частина першого циліндра зрізана скляним вітражем, на стіну заднього циліндра накинута сітка з 38-ми шестикутними ромбовидними вікнами, які створюють образ вулика.

Аптека Placebo Pharmacy від Klab Architecture (див. Додаток 4).

Грецьке архітектурне агентство klab architecture закінчило роботу над проектом аптеки placebo pharmacy, яка має форму циліндра. Внутрішня площа будівлі становить 600 кв. м. Ця аптека розташована на одній із самих довгих і жвавих доріг в Афінах. Форма будинку відповідає сучасним вимогам. Зовнішній вигляд будинку знаходить відображення в його інтер’єрі.
Описані вищі будівлі є прикладом еліптичного циліндра.

Гіперболічні поверхні в архітектурі

Вежа Шухова — сітчаста вежова гіперболоїдна конструкція системи інженера Володимира Шухова (див. Додаток 5); її утворено пересічними прямолінійними стрижнями, що містяться вздовж поверхні однопорожнинного гіперболоїда. Винахід датовано січнем 1896 року. Першу таку вежу Шухов збудував для Всеросійської промислової виставки в Нижньому Новгороді. Пізніше за системою Шухова було побудовано більш як 200 сталевих споруд:

водонапірні вежі, морські маяки, радіовежі, опори ліній електропередач, башти на кораблях військового флоту.

Найвищу вежу Шухова було побудовано в 1920—1922 роках у Москві. Вона мала шість ярусів і 148,3 м заввишки. 1921 року з неї вперше в СРСР почалося масове радіомовлення, а 1945 року — телевізійне мовлення [4].

Аджигольський маяк — маяк поблизу села Рибальче Голопристанського району Херсонської області, побудований в 1911 за проектом інженера і вченого В.Г. Шухова. Назва маяка походить від мису Аджиголь, що знаходиться у Дніпровському лимані.

Маяк складає собою вертикальну ґратчасту гіперболоїдну конструкцію зі сталевих стрижнів (див. Додаток 6). Його висота — 64 метри, що робить його найвищим в Україні, та 16-м найвищим у світі маяком традиційної конструкції [1].

Телевежа Гуанчжоу (кит. 广州 电视 观光 塔) — друга за висотою телевежа світу і найвища гіперболоїдна конструкція у світі (див. Додаток 7).

Побудована в 2005-2009 роках компанією ARUP. Висота телевежі становить 610 метрів. До висоти 450 метрів башта зведена у вигляді комбінації гіперболоїдної несучої сітківки та центрального ядра. Конструкція сітківки відповідає патенту 1896 року інженера В. Г. Шухова [4]. Башта призначена для трансляції ТБ- та радіо-сигналів, а також для огляду панорами Гуанчжоу і розрахована на прийом 10 000 туристів на день.

Aspire Tower — хмарочос в Доха, Катар. Висота 36-поверхового будинку становить 300 метрів і він є найвищою спорудою міста. Будівництво було розпочато в 2005 і завершено в 2007 році. Aspire Tower являє собою гіперболоїдну конструкцію зі сталі, формою нагадує смолоскип (див. Додаток 8).

У вежі розміщені різноманітні підприємства сфери послуг і розваг [2].

Всі ці гіперболічні поверхні є прикладом однопорожнинного гіперболоїда

Параболічні поверхні

Параболоїди обертання мають властивість фокусувати промені, що проходять паралельно головній оптичній вісі, в одній точці, ця властивість використовується при розробці антен та телескопів.

Дах вокзалу в Варшаві має форму гіперболічного параболоїда (див. Додаток 9).

Гіперболічний параболоїд утворюється сіткою прямих, що перетинаються, ця властивість використовується в будівництві. Сідловидні висячі покриття зазвичай складаються з систем пересічних тросів (увігнутих і опуклих), що створюють сітку, або є оболонкою у формі гіперболічного параболоїда (див. Додаток 12). [5].

Барселона. Храм Святого Сімейства (див. Додаток 10).

Гауда, головний архітектор храму, спланував багато внутрішніх деталей. Бажання уникнути прямих ліній разом з прагненням спростити конструкцію привели до появи принципового рішення про використання геометричних фігур з лінійчатою поверхнею, таких як гіперболоїд, гіперболічний параболоїд, гелікоїд і коноїд. Усі ці поверхні можуть бути отримані рухом прямою, тому і їх перетин є прямою лінією, що значно полегшує зчленування різних деталей конструкції. У оформленні використана ще одна геометрична фігура — еліпсоїд (див. Додаток 11).

Усе в інтер'єрі підпорядковано строгим геометричним законам. Круглі і еліптичні вікна і вітражі, гіперболічні зведення, сходи гелікоїдів, численні зірки, що виникають в місцях перетину різних лінійчатих поверхонь і еліпсоїди, що прикрашають колони, — ось неповний перелік геометричних деталей декорації Храму.

Описані вище геометричні фігури мають форму гіперболічного параболоїда.

ВИСНОВКИ

При вивченні геометрії важливе місце займає застосування наочностей, демонстрацій, котрі підтверджують теорію на практиці.

В даній роботі ми поєднали комп'ютерну графіку та математичні пакети із вивченням аналітичної геометрії.

Дана робота є корисною при вивчені курсу як аналітичної геометрії, так і курсу геометрії вцілому, а також для удосконалення знань із прикладного програмного забезпечення, яке реалізовує розв'язки проблемних питань з математики та створення найоптимальнішого засобу наочностей при вивчені геометрії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аджигольский маяк [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://golopristan.glo.ua/culture/adzhigolskij-giperloidnyj-mayak.html

2. Аналітична геометрія / За заг.ред. В. П. Белоусової. – К.: Вища школа, 1973. — 328 с.

3. Aspire Tower [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.architectureweek.com/2003/0820/culture_1-1.html

4. Атанасян, Л. С. Аналитическая геометрия. Ч. 2. Аналитическая геометрия в пространстве / Л. С. Атанасян ; Гл. упр. высш. и средн. учеб. заведений м-ва просвещения РСФСР ; Моск. гос. заоч. пед. ин-т. – М. : Просвещение, 1970. – 365, [3] с.

5. Бакланова, М. Л. Лінійна і векторна алгебра та аналітична геометрія : навч.-метод. посіб. / М. Л. Бакланова. – Черкаси, 2003. - 208 с

6. Бахвалов, С. В. Аналитическая геометрия : учеб. для пед. ин-тов / С. В. Бахвалов, Л. И. Бабушкин, В. П. Иваницкая. – М. : Просвещение, 1970. – 375, [1] с

7. Башни Шухова [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.shukhov.ru/shukhov.html

8. Боднарчук, Ю. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст] : [навч. посіб.] / Ю. В. Боднарчук, Б. В. Олійник ; [рец.: А. П. Петравчук, М. В. Працьовитий], 2010. - 175 с.

9. Бугров, Я. С. Задачник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский, 1982. - 192 с.

10. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С.Бугров, С. М.Никольский. –М.: Наука,1988. – 240 с.

11. Валєєв К. Г. Вища математика [Текст] : навч. посіб. : у 2-х ч. . Ч. 1, 2004. - 539 с.

12. Веселов А.П. Лекции по аналитической геометрии / А.П. Веселов, Е.П. Троицкий. – СПб. : Лань, 2003.

13. Виговський, Л.С. Введення в Wolfram Mathematica.— Режим доступу : htttp://www.exponenta.ru/educat/news/vygovskiy/vygovskiy.asp

14. Вища математика [Текст] : зб. задач : навч. посіб. : у 2 ч. / за ред. П. П. Овчинникова. Ч. 1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення, 2004. - 278, [1] с.

15. Гордієвський, Д. З. Аналітична геометрія в задачах / Д. З. Гордієвський. – Х. : Вид-во Харк. держ. ун-ту ім. О. М. Горького, 1967. – 246, [1] с.

16. Курс математики для техникумов [Текст] / под ред. Н. М. Матвеева. Ч. 1, 1976. – 432 с. Математика, ее содержание, методы и значение [Текст] : [в 3 т.] / Акад. Наук СССР, Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. - М. : Изд-во Акад. наук СССР, 1956. – **Т. 1**. - 294, [1] с. : ил. Из содерж.: Общий взгляд на математику / А.Д. Александров. Анализ / М. А. Лаврентьев, С. М. Никольский. Аналитическая геометрия / Б. Н. Делоне. Алгебра (Теория алгебраических уравнений) / Б. Н. Делоне.

17. Моденов, П. С. Аналитическая геометрия / П. С. Моденов. – М. : Изд-во моск. ун-та. – 698 с.

18. Назієв, Е. Х. Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст] : навч. посіб. / Е. Х. Назієв, В. М. Владіміров, О. А. Миронець, 1997. - 149, [2] с.

19. Норден, А. П. Теория поверхностей / А. П. Норден. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит. – 259, [1] с.

20. Пастушенко, С. М. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв'язування задач [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. закл. освіти / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко . - К. : Діал, 2000. - 158, [1] с.

21. Погорелов, А. В. Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов. –М.: Наука, 1978.—208 с.

22. Половко, О. М. Mathematica для студента / О. М. Половко. –СПб.: БХВ-Петербург, 2007. - 368 с.

23. Постников, М. М. Аналитическая геометрия / М. М. Постников. – М.: Высшая школа, 1963. — 314 с.

24. Привалов, И. И. Аналитическая геометрия / И. И. Привалов. – М.: Физматгиз, 1963. - 272 с.

25. Прус, А.В. Практикум з аналітичної геометрії : навч. – метод. посіб. / Прус А.В., Чемерис О.А., Мосіюк О.О. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2012. – 164с.

26. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра [Текст] / Г. П. Размыслович, М. М. Феденя, В. М. Ширяев, 1987. - 350, [1] с.

27. Рубан, П. И. Руководство к решению задач по аналитической геометрии / П. И. Рубан, Е. Е. Гармаш. – М.: Высшая школа, 1963.-314 с.

28. Тевяшев, А. Д. Вища математика у прикладах та задачах / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин. – Харків : ХТУРЕ, 2002. – 552 с.

29. Фиников, С. П. Аналитическая геометрия : курс лекций, чит. в Моск. гор. пед. ин-те / С. П. Фиников. – 2-е изд. – М. : УЧПЕДГИЗ, 1952. – 326, [1] с.

30. Яковець, В. П. Аналітична геометрія [Текст] : навч. посіб. / В. П. Яковець, В. Н. Боровик, Л. В. Ваврикович, 2004. - 294 с.

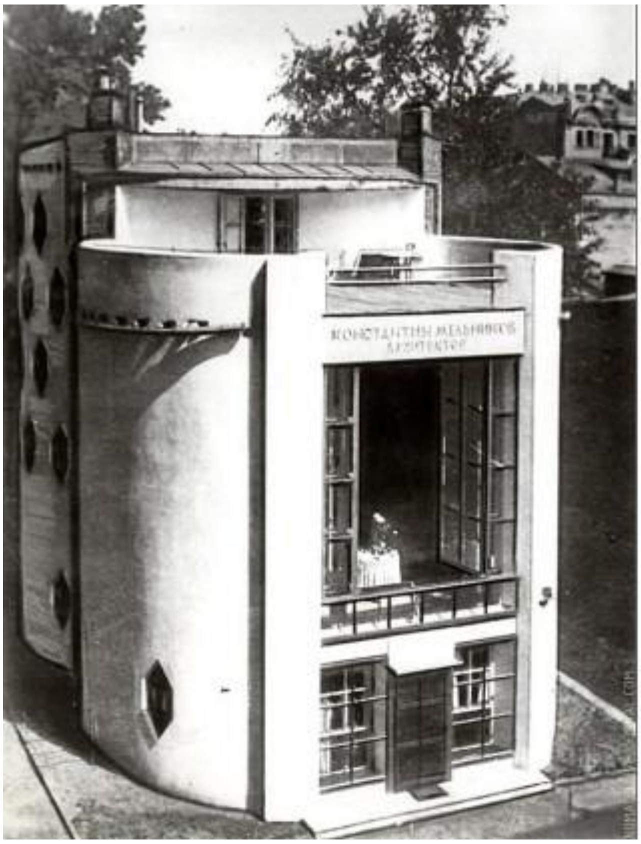
ДОДАТКИ

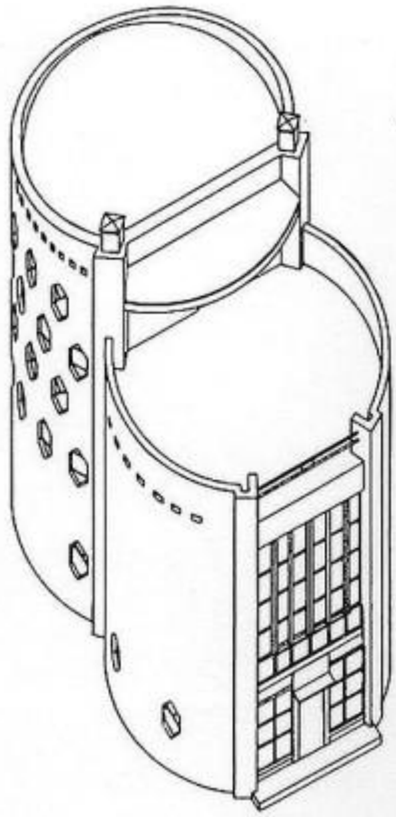
Додаток 1.

Рівняння кривої	Вісь обертання	Рівняння поверхні обертання
$F(x,y)=0$	OX	$F\left(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$
	OY	$F\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y\right)=0$
$F(x,z)=0$	OX	$F\left(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$
	OZ	$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$
$F(y,z)=0$	OY	$F\left(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$
	OZ	$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$

Додаток 2.

Додаток 3.





Додаток 4.

Додаток 5.

Додаток 6.

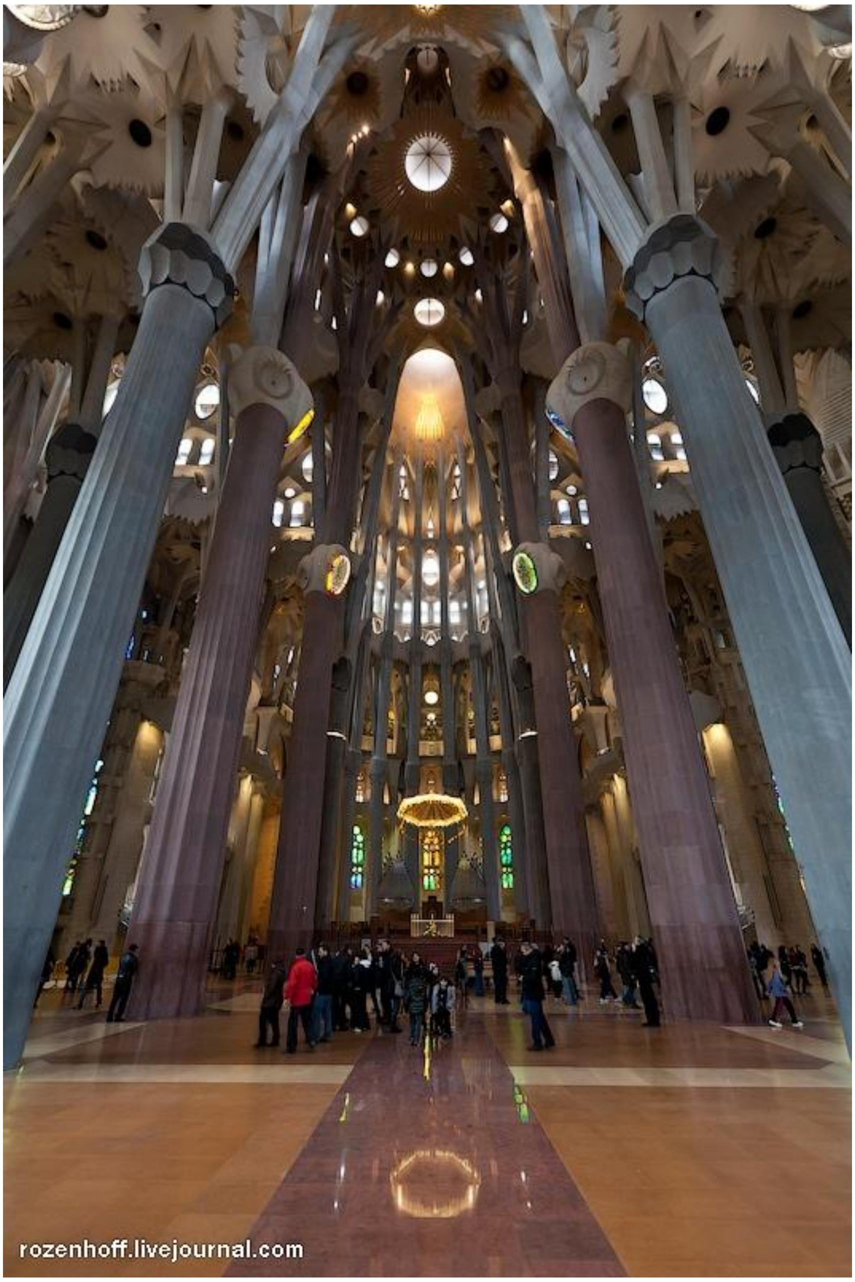
Додаток 7.

Додаток 8.

Додаток 9.

Додаток 10.

Додаток 11.



Додаток 12.